ELEMENTI DI GEOMETRIA

DEL SIGNOR

CLAIRAUT

DELL' ACCADEMIA REALE DELLE SCIENZE, E DELLA SOCIETA' REALE DI LONDRA

TRADOTTI

DAL FRANCESE IN LINGUA ITALIANA

EDIZIONE SECONDA

CORRETTA, ED AUMENTATA.

IN ROMA MDCCLXXI.

A ſpeſe di VENANZIO MONALDINI Libraro al Corſo

NELLA STAMPERIA DI GIOVANNI ZEMPEL.

CON LICENZA DE' SUPERIORI.

A SUA ECCELLENZA
IL SIGNOR
GIACOMO TIEPOLO
PATRIZIO VENETO.

QUANDO m' accinsi a questa nuova Edizione de' Geometrici Elementi del CLAIRAUT già da me altra volta pubblicati in no-

ſtro Italiano Linguaggio, fe-
ci nell' animo mio diſegno
di dedicarla a Giovane illu-
ſtre, che, proſſimo ad in-
traprendere lo ſtudio delle
Scienze, per facilitarſi con
eſſe il ſoſtentamento de' lu-
minoſi carichi dalla coſpicua
condizion di ſua naſcita de-
ſtinatigli, deſſe principio dal-
la Geometria. Avvegnacchè
di molti, e graviſſimi Filoſofi
ella è opinione, che lo ſtu-
dio

dio d'ogni altra ſcienza malagevole ſia, e preſſocchè ſterile, e infruttuoſo anche a Giovani dalla natura dotati di fervido, e perſpicace ingegno, qualora non abbiano prima eſſi imparato a diſtaccare il penſiero dai ſenſibili oggetti, che ſpeſſo ingannano, e a renderlo abile a ſciogliere francamente il volo alle più aſtratte, e ſublimi cognizioni della Geo-

metria principal parte della Matematica Facoltà, le di cui ſpeculazioni tutte verſano ſopra principj non meno infallibili, che luminoſi. Non ebbi appena condotta a fine queſta mia Edizione, che la Fortuna recandovi in Roma inſieme col voſtro inclito, e magnanimo Genitore dalla Sereniſſima Veneta Repubblica ultimamente preſcelto all'onorevoliſſimo carico

rico di ſuo Ambaſciatore
preſſo la Santa Apoſtolica
Sede, mi preſentò in Voi
l'illuſtre Giovane diſegnato.
Eſce dunque il Libro alla
pubblica luce fregiato del
voſtro per molti sì proprj,
che paterni, ed aviti pre-
gi riſpettabiliſſimo Nome: e
per tal onore allo ſteſſo Li-
bro da me procurato niente
io non dubito, ch'egli per
gratitudine, ed in corriſpon-

den-

denza, allorchè con Voi converserà frequentemente, come spero, vi ricorderà mai sempre, che io vivamente aspiro all' altro maggiore di essere da tutta la vostra nobilissima Casa per tale considerato, quale con invariabile sommo ossequio mi protesto

DI VOSTRA ECCELLENZA

Umo Dmo Obblmo Servitore
Giuseppe Antonio Monaldini.

TAVOLA DELLE MATERIE.

PRIMA PARTE.

De' mezzi, che si devono naturalmente impiegare per avere la misura de' Terreni.

Le

Le

Tut-

PARTE SECONDA

Del metodo Geometrico di paragonare le Figure rettilinee.

PARTE TERZA

Della misura delle figure circolari, e delle loro proprietà.

XIII. *Se*

PARTE QUARTA

Della maniera di misurare i solidi, e le loro superficie.

XLVII. *La*

LX. *La*

LXXIII. *In*

FINE DELLA TAVOLA.

REIM-

REIMPRIMATUR,

Si videbitur Rm̃o Patri Sacri Palatii Apostolici Magistro.

D. Patriarch. Antioch. Vicesg.

REIMPRIMATUR,

Fr. Thomas Augustinus Ricchinius Ord. Præd. Sac. Pal. Ap. Magister.

ELE-

PREFAZIONE.

Enchè la Geometria ſia per ſe medeſima aſtratta, conviene nondimeno confeſſare, che la difficoltà, la quale provano coloro, che cominciano ad applicarviſi, proviene il più delle volte dalla maniera, con cui quella s'inſegna negli ordinarj Elementi. Si ſuol cominciare con un gran numero di definizioni, di poſtulati, di aſſiomi, e di principj preliminari, i quali moſtrano di non promettere

altro al lettore, che cose molto secche, e nojose. Le proposizioni, che quindi seguono, non fissano la mente sopra cose interessanti: e dall'altra parte essendo difficili a concepirsi, ne segue comunemente, che i principianti si straccano, e l'abbandonano prima di avere alcuna idea distinta di ciò, che si vuole loro insegnare.

Per torre questa seccaggine naturale allo studio della Geometria, alcuni Autori hanno preso il ripiego di mettere dopo ogni principale proposizione l'uso, che si può fare di quella per la pratica: ma così provano l'utilità della Geometria, senza molto facilitare il modo di apprenderla. Perchè essendo ciascheduna proposizione posta prima del suo uso, la mente non perviene

ne alle idee ſenſibili, che dopo avere avuta la fatica di apprendere le idee aſtratte.

Alcune rifleſſioni, che ho io fatte ſull'origine della Geometria, mi hanno fatto ſperare di ſcanſare queſti inconvenienti, unendo queſti due vantaggi di rendere le coſe più intereſſanti, e più intelligibili a' principianti. Io ho conſiderato, che queſta ſcienza, ſiccome tutte le altre, deve eſſerſi formata per gradi; che veriſimilmente qualche neceſſità è ſtata quella, che ha fatto fare i primi paſſi, e che queſti primi paſſi non poſſono eſſer fuori della portata de' principianti; poichè i principianti appunto in queſta facoltà gli avevano fatti.

Prevenuto da queſta idea, mi ſon io propoſto di trovare quel,

che può aver dato origine alla Geometria; ed ho procurato di ſpiegarne i principj col metodo più naturale, ſiccome quello, che ſupponevo eſſere ſtato de' primi inventori; oſſervando ſolamente di evitare tutti li falſi tentativi, ch' eſſi hanno neceſſariamente dovuto fare.

La miſura de' terreni mi è paruta la più propria ad aver dovuto far naſcere le prime propoſizioni della Geometria; e queſto è in effetto l'origine di queſta ſcienza; poichè Geometria ſignifica *miſura di terreno*. Alcuni Autori pretendono, che gli Egiziani vedendo continuamente i termini de' loro poderi diſtrutti dall'inondazioni del Nilo, gettaſſero i primi fondamenti della Geometria, cercando mezzi d' aſſicurarſi eſattamente, qual foſſe il ſito, l'eſtenſione,

ſione, la figura de' loro averi. Ma quando ancora non ci rapportiamo a queſti Autori; potrem noi dubitar di queſto; che ne' primi tempi gli uomini non abbiano cercato metodi per miſurare, e per ſpartire le loro terre? Volendo poi perfezionare queſti metodi, le ricerche particolari li hanno condotti a poco a poco a delle ricerche generali; e finalmente eſſendoſi propoſti di conoſcere eſattamente il rapporto di tutte le ſorti di grandezze, formarono una ſcienza di un oggetto molto più vaſto di quello, che avevano abbracciato al principio, ed alla quale contuttociò conſervarono il nome, che le avevano dato nella ſua origine.

Affine di ſeguire in queſt'Opera un metodo ſimile a quello degl'inventori, io comincio ſubito dallo

ſcoprire a' principianti li principj, da' quali può dipendere la ſemplice miſura de' terreni, e delle diſtanze acceſſibili, ovvero inacceſſibili &c. Da queſta paſſo ad altre ricerche, che hanno una tale analogia colle prime, che la curioſità, naturale a tutti gli uomini, li porta a fermarviciſi, ed inſieme giuſtificando queſta curioſità con qualche applicazione utile, io farò ſcorrere tutto quello, che la Geometria elementare ha di più intereſſante.

Non ſi può, ſecondo me, negare, che queſto metodo non ſia almeno adattato ad animare coloro, i quali potrebbero venirne ritirati dalla ſeccaggine delle verità Geometriche nude di applicazioni. Io ſpero di più, che avrà queſt'altra utilità più importante; che avvezzerà

zerà la mente a cercare, e ſcuoprire nuove coſe. Queſto è, perchè io sfuggo di proporre le propoſizioni ſotto la forma di Teoremi; cioè a dire di quelle propoſizioni, nelle quali ſi dimoſtra queſta, o quella verità, ſenza far vedere, come ſi è arrivato a diſcoprirla.

Se i primi Autori delle Mattematiche hanno preſentato così le lor diſcoperte in forma di Teoremi, queſto è ſtato ſenza dubbio per dare un aria di maggior meraviglia alle lor produzioni, o per sfuggir la fatica di riprender la ſerie delle idee, che li avevano guidati nelle loro ricerche. Comunque ſia, mi è ſembrato molto più a propoſito di occupare continuamente i miei Lettori a riſolvere problemi; cioè a cercare li mezzi di fare qualche operazione,

o di difcoprire qualche verità fconofciuta, determinando il rapporto, che vi ha tra grandezze date, ed altre grandezze incognite, che uno fi è propofto di trovare. Seguendo quefta via, i principianti conofcono a ciafcun paffo, che lor fi faccia fare, qual' è la ragione, che determina l'inventore; e così poffono acquiftare più facilmente lo fpirito d'invenzione.

Mi fi opporrà forfe in qualche luogo di quefti elementi, che troppo io mi rapporto al teftimonio degli occhi; e che fto poco attaccato al rigore delle dimoftrazioni. Io prego coloro, che mi riprendono, ad offervare, come il paffare, che io fo leggiermente fopra alcune propofizioni, non è che sù quelle, la verità delle quali fi manifefta da fe fubito,

bito, per poco che un le consideri. Io così pratico specialmente sul principio, ove più spesso si rincontra di simili proposizioni: perchè ho osservato, che quelli, i quali avevano della disposizione per la Geometria, avevano del piacere ad esercitare un poco il loro spirito; ed al contrario, se ne ritiravano, allorchè si ammassava delle dimostrazioni, per così dire, inutili.

Nessuno rimarrà sorpreso, perchè Euclide si metta a dimostrare, che due circoli, i quali si dividono, non hanno l'istesso centro; che un triangolo contenuto dentro un altro ha la somma de' suoi lati più piccola, che quella de' lati del triangolo, dentro il quale è compreso. Questo Geometra aveva a convincere de' sofisti ostinati, che si facevano gloria di

di ripugnare alle verità le più evidenti. E' bisognava dunque, che allora la Geometria avesse, come appunto la Logica, il soccorso de' discorsi in forma, per serrar la bocca alle vane opposizioni. Ma le cose sono cangiate di faccia. Ogni ragionamento impiegato sopra di ciò, che il buon senso da se solo è più che sufficiente a decidere, si ha al giorno d'oggi in conto di pura perdita di tempo, e non vale, che ad oscurare la verità, ed a recar dispiacere a' Lettori.

Mi si potrebbe fare un'altra opposizione di aver tralasciato diverse proposizioni, che si sogliono porre ordinariamente negli Elementi, e di contentarmi, quanto alle proposizioni, di darne solo le principali, e fondamentali.

A que-

A questo rispondo io, che si trova in questo trattato tutto quello, che può servire per adempire il mio disegno; che le proposizioni da me tralasciate sono quelle, che non possono per se medesime essere di alcuna utilità, e niente contribuiscono a facilitare l'intelligenza delle altre, che è necessario sapere. Quanto alle proporzioni, quel, che io ne dico, deve bastare per far capire le proposizioni elementari, che le suppongono. Questa è una materia, che tratterò più a fondo negli elementi dell'Algebra, che io sto per dar fuori.

Finalmente, avendo io scelto la misura de' terreni, per interessare i principianti a questo studio, non credo di dover temere, che si confondano questi elementi coll'ordinario

nario trattato, che si da per una simil misura. In questo errore non può venire se non chi non rifletta, che la misura de' terreni non è il vero soggetto di questo libro; ma mi serve ella solamente di occasione a far discoprire le principali verità Geometriche. Io avrei potuto medesimamente pervenire a queste verità, facendo l'Istoria della Fisica, dell'Astronomia, o di qualsivoglia altra parte delle Mattematiche, che mi piacesse di sciegliere. Ma allora la moltitudine delle idee straniere, nelle quali sarebbe stato necessario occuparsi, avrebbe come affogato le idee Geometriche, alle quali sole io doveva fissare la mente del mio Lettore.

ELEMENTI DI GEOMETRIA.

PARTE PRIMA

De' mezzi, che ſi dovevano naturalmente impiegare per avere la miſura de' Terreni.

Uel, che pare, che debbano aver dovuto miſurare ſul principio, ſono le lunghezze, e le diſtanze.

I.

Per miſurare una lunghezza qualun-

lunque, la Geometria naturale ci suggerisce subito questo espediente; di paragonar la lunghezza di una misura conosciuta a quella della lunghezza, che si vuol conoscere.

I I.

La linea retta è la linea più corta, che si possa tirare da un punto all' altro, e conseguentemente la misura della distanza tra due punti.

Quanto alla distanza, si vede, che per misurare quella, che passa tra due punti, bisogna tirare una linea retta dall' uno all' altro punto, e sù questa linea riportare la misura conosciuta: perchè tutte le altre linee facendo necessariamente un deviamento più, o meno grande, sono più lunghe, che la linea retta, la qual non fa deviamento alcuno.

I I I.

Tavola Prima.

Fig. I.

Oltre le necessità di misurare la distanza da un punto all' altro, accade spesso di dover misurare la distanza da un punto ad una linea.

Per

Per esempio un uomo posto in D sulla riva di un fiume vuol sapere, quanto v'è dal luogo, dove egli sta, all'altra riva AB. E' chiaro, che in questo caso, per misurar la distanza cercata, bisogna prender la più corta di tutte le linee rette DA, DB &c., che si posson tirare dal punto D alla retta AB. Ov' è facile il vedere, come questa linea più corta, di cui si ha di bisogno, è la linea DC, che si suppone, non pendere nè verso A, nè verso B. Questa è dunque quella linea (chiamata perpendicolare) sulla quale bisogna riportare la nota misura per aver la distanza DC, dal punto D alla retta AB. Ma è pur manifesto, che per posar questa misura sulla linea DC, bisogna, che questa linea fosse prima tirata. Dunque

Una linea, che cade sopra un' altra senza pendere verso alcuna parte, o perpendicolare a questa linea.

que era necessario, che vi fosse un metodo per tirar delle perpendicolari.

I V.

Vi era ancora bisogno di tirarne in un' altra infinità di occasioni. Per esempio, si sà, che la regolarità delle figure, quali sono ABCD, FGHI, chiamate rettangoli, e composte di quattro lati perpendicolari tra loro, sono quelle, che danno la forma alle case, alle lor parti interiori, a' giardini, alle camere, a' parati de' muri &c.

FIG. II. e III.

Il rettangolo è una figura di quattro lati tra loro perpendicolari.

La prima di queste figure, cioè ABCD, che ha i quattro lati eguali, si chiama comunemente quadrato. L'altra FGHI, che non ha, che i lati opposti uguali, ritiene il nome di rettangolo.

Ed il quadrato è un rettangolo, che ha i quattro lati eguali.

V.

Nelle differenti operazioni, che diman-

dimandano, che si tirino delle perpendicolari, si tratta o di calarne sopra una linea da un punto preso al di fuori, o di alzarne da un punto posto sulla linea medesima.

FIG. IV.

Maniera di alzare una perpendicolare.

Se dal punto C, preso nella linea AB, si voglia alzare la linea CD perpendicolare ad AB, bisognerà, che questa linea non pendi nè verso A, nè verso B.

Supponendo primieramente, che C stia in ugual distanza da A, e da B, e che la retta CD non penda da alcun lato, è chiaro, che ciaschedunode' punti di questa linea sarà egualmente distante da A, e da B. Non sarà dunque necessario altro, che trovare un punto qualunque D tale, che la sua distanza dal punto A sia uguale alla sua distanza dal punto B. Perchè allora tirando per C, e per que-

ſto punto una linea retta CD, queſta linea ſarà la perpendicolare cercata.

Per avere il punto D, ſi potrà andar provando, e riprovando, e come cercandolo a tentone: ma queſta è una maniera, che non ſoddisfa punto, e ci vuole un metodo, che ſubito lo trovi. Eccolo:

Si prenda una comune miſura, per eſempio una corda, un compaſſo di una determinata apertura, ſecondo che l'operazione ſi farà o ſul terreno, o ſulla carta.

Preſa queſta miſura, ſi fiſſi al punto A o l'eſtremità della corda, o una punta del compaſſo, e facendo girare l'altra punta, o l'altra eſtremità della corda, ſi deſcriva l'arco PDM. Poi ſenza cangiar di miſura, ſi faccia l'iſteſſa operazione per rapporto al punto B, e ſi deſcriva l'arco QDN; il

quale

quale col dividere il primo al punto D, darà il punto cercato.

Perchè appartenendo il punto D egualmente a'due archi PDM, QDN descritti per mezzo di una misura comune, la sua distanza dal punto A sarà uguale alla distanza dal punto B. Dunque CD non penderà nè verso A, nè verso B. Dunque questa linea sarà perpendicolare sopra AB.

Se'l punto C non si trova ad ugual distanza da A, e da B, bisogna prendere due altri punti *a*, e *b* egualmente lontani da C, e servirsi di quelli in luogo di A, e di B, per descrivere gli archi PDM, QDN.

FIG. V.

VI.

Se una di quelle tracce, come PDM, fosse stata continuata in O, in E, ed in R &c., finchè ella ritornasse al medesimo punto O, la traccia tutta in-

FIG. IV.

Il circolo è la traccia intera, che descrive la punta mobile d'un compas-

paſſo, mentre che gira intorno dell'altra punta.

tera ſi chiamerebbe circonferenza del circolo, o ſemplicemente circonferenza.

Se non ſi deſcrive, che la traccia di una parte PDM della circonferenza, queſta parte ſi chiama arco del circolo.

Il centro è il luogo del punto fiſſo.

Il punto fiſſo A ſi chiama ſuo centro, o centro del circolo.

Il raggio è l' intervallo, col quale è aperto il compaſſo.

E l' intervallo AD il ſuo raggio.

Tutte le linee, come DAE, che paſſano pel centro A, e che ſono terminate alla circonferenza, ſono chiamate diametri. E' chiaro, che queſta linea è il doppio del raggio: e per queſto il raggio ſi chiama talora ſemidiametro.

Il diametro è doppio del raggio.

VII.

FIG. VI.

Maniera di calare una perpendicolare.

La maniera di alzare una perpendicolare ſopra una linea AB, ci ſommini-

ministra la maniera di calare una perpendicolare da qualunque punto E, preso fuori di questa linea. Perchè fissando in E o l'estremità del filo, o la punta del compasso, e con un medesimo intervallo E *b*, segnando due punti *a*, e *b* sulla linea AB, si cercherà, come nell'articolo precedente, un'altro punto D, il quale abbia l'istessa distanza al punto *a*, e al punto *b*; e per questo punto, e per E si tirerà la retta DE, la quale avendo ciascuna delle sue estremità egualmente distante da *a*, e da *b*, e non pendendo più verso l'uno di questi punti, che verso l'altro, sarà perpendicolare ad AB.

VIII.

Dall'operazion precedente se ne ricava la soluzione di un nuovo Problema.

Fig. VII.

Dividere una linea in due parti uguali.

Se ſi tratta di dividere una linea retta AB in due parti uguali da' punti A, e B preſi, come centri, e con una apertura di compaſſo qualunque, ſi deſcrivano gli archi REI, GEF da' medeſimi centri; e colla medeſima apertura, o con qualunque altra, che uno vorrà, ſi deſcrivano gli archi PDM, QDN; e la linea ED, la quale congiungerà i punti di interſezione E, e D, e dividerà AB in due parti uguali al punto C.

I X.

Trovata la maniera di tirare delle perpendicolari, è faciliſſimo il ſervirſene per deſcrivere quelle figure, che ſi chiamano rettangoli, e quadrati, delle quali ſi è parlato nell'Articolo IV. Si vede facilmente, che per fare un quadrato ABCD, di cui i lati ſieno eguali a una linea data

Fig. II.

Dato un lato fare un quadrato.

data K, bisogna prendere sulla retta GE un intervallo AB eguale a K; poi a' punti A, e B alzare (Artic. v.) le perpendicolari AD, BC ciascuna eguale a K, e insieme tirare DC.

X.

Fig. III.

Fare un rettangolo, data la lunghezza, e larghezza.

Se vuole uno descrivere un rettangolo FGHI, di cui la lunghezza è K, e la larghezza L, farà FG uguale a K; e insieme alzerà le perpendicolari FI, GH ciascuna eguale a L, poi tirerà HI.

X I.

Nel fare alcuni lavori, come parapetti, canali, strade &c. vi è di bisogno di tirare delle linee parallele; cioè a dire delle linee, di cui la posizione sia tale, che la loro distanza venga misurata per tutto da perpendicolari d'uguale lunghezza.

 Or

Or per menare queste parallele il metodo più facile parmi quello, di cui ci siam serviti per descrivere i rettangoli. AB per esempio sia un lato o di canale, o di parapetto; e sia la larghezza, che gli si vuol dare CA: o per proporre il quesito d'una maniera più Geometrica, e più generale, suppongasi, che si voglia tirare per C la parallela CD ad AB; si prenderà, come uno vuole, un punto B nella linea AB, e si opererà in quella maniera medesima, come se avendo la base AB, si volesse fare un rettangolo ABCD, che avesse AC per altezza. Così facendo le linee CD, AB prolungate all'infinito, saranno sempre parallele; ovvero, quel che è l'istesso, non si rincontreranno mai tra loro.

Fig. VIII.

Menare una parallela a una linea per un punto dato.

XII. La

XII.

La regolarità delle figure rettangole fa, che queste vengono spesso in uso, come abbiamo già detto, e talora v'è bisogno di conoscere la loro grandezza. Per esempio si ha da vedere, quanti parati vi vogliono per una camera; ovvero quante canne ha da contenere il recinto di una casa, che la forma di rettangolo &c.

Per arrivare a ciò, ognun vede, che il mezzo più semplice, e più naturale è di servirsi di una comune misura, la quale applicata più volte alla superficie, che deve misurarsi, tutta la scorra. Metodo, che torna a quel medesimo, di cui ci siamo serviti per determinare la lunghezza delle linee.

Ora è evidente, che una misura

comu-

comune di ſuperficie deve pur ella eſſer ſuperficie; per eſempio quella d'una canna quadrata, di un piè quadrato &c., e così miſurare un rettangolo, e determinare il numero delle canne quadrate, ovvero de' piedi quadrati &c., che contiene la ſua ſuperficie.

Rechiamone, per ſollevare un po la mente, un'eſempio. Supponghiamo, che il rettangolo dato ABCD abbia 7. piedi di altezza sù una baſe di 8. piedi; Si potrà riguardare queſto rettangolo, come diviſo in ſette traverſe *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, delle quali ciaſcuna contenga 8. piedi quadrati; ſarà dunque il valore del rettangolo 7. volte 8. piedi quadrati; cioè 56. piedi quadrati.

FIG. IX.

Ora ſe uno riflette ai primi Elementi del calcolo Aritmetico, e che mol-

moltiplicare due numeri non è altro, che prendere uno di eſſi tante volte, quante unità ſono contenute nell'altro; troverà, che vi corre una perfetta analogia tra la moltiplicazione ordinaria, e l'operazione fatta per miſurare il rettangolo. Vedrà, che ſi determina la quantità delle canne quadrate, o piedi quadrati &c., che contiene la ſua ſuperficie, moltiplicando il numero delle canne, ovvero de' piedi &c., che dà la ſua altezza, per lo numero delle canne, o de' piedi &c., che dà la ſua baſe.

La miſura di un rettangolo è il prodotto della ſua altezza per la ſua baſe.

XIII.

Le figure, che ſi hanno da miſurare, non ſono ſempre regolari, come ſono i rettangoli: contuttociò ſpeſſo occorre, che ſi debbano miſurare; e talora determinare la ſteſa

ſa di un lavoro fatto sù un terreno, che è irregolare; talora ſapere, quante canne contiene una terra terminata irregolarmente. Era dunque neceſſario aggiungere al metodo di determinare la ſteſa de' rettangoli, quello di miſurare le figure, che non ſono tali.

Le figure rettilinee ſono quelle, che vengono terminate da linee rette.

Si vede in primo luogo, che per la pratica la difficoltà non conſiſte, che in miſurare le figure rettilinee tali, qual'è ABCDE: cioè a dire, figure terminate da linee rette. Perchè ſe nel contorno di un terreno ſi trova qualche linea curva, come nella figura ABCDEFG; egli è evidente, che queſte linee diviſe in altrettante parti, quante ne ſarà neceſſario di fare per evitare ogni errore ſenſibile, potranno conſiderarſi, come compoſte da linee rette.

Fig. II.

Ciò

Ciò ſuppoſto, malgrado l'infinita varietà di figure rettilinee, ſi poſſono tutte miſurare nell'iſteſſa maniera, dividendole in figure di tre lati, chiamati comunemente triangoli: per poter poi ciò fare nella maniera più ſemplice inſieme, e più comoda, da un punto qualunque A del contorno della figura ABCDE, ſi tirano le linee rette AC, AD &c. a' punti C, D &c.

Il triangolo è una figura terminata da tre linee rette.

X I V.

Non c'è dunque biſogno d'altro, che d'avere la miſura de' triangoli, che uno avrà formati. Or ſi sà, che per trovare ciò, che noi non ſappiamo, il mezzo più ſicuro è di cercare, ſe in ciò, che già ſi conoſce, vi è niente, che riferiſca a ciò, che vuolſi conoſcere: ma noi di già abbiamo veduto, che tutto il rettangolo ABCD

è uguale al prodotto della ſua baſe AB nell'altezza CB. Quindi è facile il vedere, che queſta figura diviſa a traverſo per la linea AC, che ſi chiama diagonale, ſi trova partita in due triangoli uguali; e di lì s'inferiſce, che ciaſcuno di queſti triangoli ſarà uguale alla metà del prodotto della lor baſe AB, ovvero DC per la loro altezza CB, ovvero DA.

La diagonale d'un rettangolo è la linea, che lo divide in due triangoli uguali.

Egli è vero, che non ſempre avviene, che i triangoli, i quali ſi devono miſurare, abbiano due de' loro lati perpendicolari l'uno all'altro, come i triangoli ABC, ADC, i quali ſi chiamano triangoli rettangoli, ma queſto poco importa: potendoſi ſempre ridurre a triangoli di queſta ſorte.

Li triangoli rettangoli ſono quelli, che hanno due de' loro lati perpendicolari l'uno all'altro.

Tavola II. Fig. I.

Perchè dall'A, punta d'un triangolo qualunque ABC, ſi cali la perpendicolare AD ſulla baſe BC, il

trian-

triangolo ABC ſi troverà partito in due triangoli rettangoli ABD, ADC.

Riprendendo ora il filo del diſcorſo, egli è evidente, che come li due triangoli ABD, ADC ſaranno la metà de' rettangoli AEBD, ADCF; così pure il triangolo propoſto ABC ſarà la metà del rettangolo EBCF, il quale avrà BC per baſe, e AD per altezza: ma la ſuperficie del rettangolo EBCF è uguale al prodotto dell' altezza EB, ovvero AD per la baſe BC; dunque il triangolo ABC avrà per miſura la metà pel prodotto della baſe BC per la perpendicolare AD, altezza del triangolo.

Un triangolo è la metà del rettangolo, che ha la medeſima baſe, e altezza.

Dunque la ſua miſura è la metà del prodotto dell' altezza per la ſua baſe.

Abbiamo dunque la maniera di miſurare tutti li terreni terminati dalle linee rette: poichè non ve n'è niuno, il quale non poſſa ridurſi a triangoli: e ſi può ſempre dalla ſommità

mità di questi triangoli calare una perpendicolare alla base.

X V.

Dal metodo, che abbiamo dato per misurare l'area, ovvero la superficie de' triangoli coll'adoprare solo la loro base, e la loro altezza, senza avere verun riguardo alla lunghezza de' lati, si ricava questa proposizione, ovvero questo teorema; che tutti i triangoli, come ECB, ACB, i quali hanno una base comune CB, e de' quali l'altezze EF, AD sono uguali, hanno la medesima superficie.

FIG. II.

I triangoli di eguale altezza, e di egual base sono ancora di egual superficie.

X V I.

Per facilitare l'intelligenza del principio, che dà la misura de' triangoli, noi abbiamo creduto non dover scegliere per base, se non un lato, sù cui potrebbe cascare la perpendicolare calata dalla punta opposta; ciò,

ciò, che si può sempre fare, quando non si tratta, che di misurar terreni. Ma perchè nel confronto de'triangoli, che hanno la medesima base, le perpendicolari calate dalle lor sommità possono cascare fuori del triangolo, come nella figura 3. par, che sia necessario di vedere, se ne' triangoli tali, quale è BCG, succede il medesimo, che sieno sempre la metà dei rettangoli ECBF, i quali hanno la perpendicolare GH per altezza. Ma di questo è facile l'assicurarsi, avvertendo, che il triangolo CGH somma de' due triangoli CGB, GBH è la metà del rettangolo ECHG somma de'due rettangoli ECBF, FBHG; e così, che i due triangoli CGB, GBH, presi insieme sono la metà del rettangolo ECHG: or il triangolo GBH è la metà del rettangolo FBHG;

FIG. II.

dunque il triangolo propòsto BCG è la metà dell'altro rettangolo ECBF; il quale ha BC per base, e GH per altezza.

XVII.

FIG. IV.

I triangoli, che hanno la medesima base, e sono tra le medesime parallele, sono d'egual superficie.

La proposizione dimostrata ne' tre articoli precedenti può ancora generalmente proporsi in questi termini: i triangoli EBC, ABC, GBC sono eguali, allorchè eglino hanno una base comune BC, e sono tra le medesime parallele EAG, CBH, cioè a dire, allorchè le loro sommità E, A, G si trovano in una medesima linea retta EAG parallela alla retta CB. Perchè allora (Art. XI.) le loro altezze misurate dalle perpendicolari EF, AD, GH sono le medesime.

XVIII.

Tra le differenti figure rettilinee, che si possono misurare col precedente

te metodo, vi sono alcune, che s'accostano alla regolarità de' rettangoli. Questi sono spazj tali, quale è ABCD, terminati da quattro lati, parallelo ognuno al lato opposto. Queste figure sono chiamate parallelogrammi, e sono più facili a misurarsi, che le altre figure rettilinee, eccetto i rettangoli. Perchè diviso il parallelogrammo ABCD in due triangoli ABC, ACD, questi due triangoli saranno, come ognun vede, uguali. Or come ciascuno di questi triangoli è uguale alla metà del prodotto dell'altezza AF per la base BC, il parallelogrammo avrà per misura il prodotto intiero della base BC per l'altezza AF.

FIG. V.

I parallelogrammi sono figura di quattro lati, de' quali i due opposti sono paralleli.

Si misura moltiplicando l'altezza per la base.

X I X.

Da questo ne segue, che tutti i parallelogrammi ABCD, EBCF, che

FIG. VI. o VII.

I parallelogrammi, che hanno la base comune, e sono tra le medesime parallele, sono di egual superficie.

hanno una base comune, e si trovano tra le medesime parallele, sono uguali tra loro: ciò, che è facile vedere ancora indipendentemente dal detto, osservando, che il parallelogrammo ABCD diverrà il parallelogrammo EBCF, se vi si aggiunge il triangolo DCF, e se dalla figura intiera ABCF si leva il triangolo ABE, perchè così, supponendo essere i due triangoli DCF, ABE uguali, è evidente, che il parallelogrammo ABCD non avrà mutato grandezza, diventando EBCF. Ora per assicurarsi dell'ugualità di que' due triangoli, basterà osservare, che AB, e CD essendo parallele, come lo sono BE, CF, il triangolo ABE non sarà altro, che il triangolo DCF, il quale siasi mosso sulla sua base, in maniera, che il punto A sia andato in D ed E in F.

XX. Vi

X X.

Vi è dell'altre figure rettilinee, che sono facili a misurarsi, e chiamansi poligoni regolari, figure terminate da lati uguali, i quali hanno tutti la medesima inclinazione, o pendenza gli uni agli altri. Tali sono le figure ABDEF, ABDEFG, ABDEFGH.

Li poligoni regolari sono figure terminate da lati uguali, e ugualmente inclinati gli uni agli altri.

Fig. VIII. IX. e X.

Siccome abbiamo per costume di dare la forma di queste figure alle vasche, alle fontane, alle pubbliche piazze &c., credo, che sia necessario, avanti d'insegnare, come si misurino, il dare la maniera di descriverla.

X X I.

Se uno, descritta una circonferenza di circolo, la divide in altrettante parti uguali, quanti lati vuol, che abbia il poligono, e insieme tira le linee AB, BD, DE &c. per i punti A, B, D, E &c., che dividono la

Maniera di descrivere un poligono d'un numero determinato di lati.

Il pentagono ha 5. lati, l'esagono 6., l'eptagono 7., l'ottogono 8., l' enneagono 9., il decagono 10. &c.

circonferenza, avrà il poligono cercato, il quale chiamerà pentagono, esagono, eptagono, ottogono, enneagono, decagono &c. secondo, che egli avrà cinque, sei, sette, otto, nove, dieci &c. lati.

X X I I,

Misura della superficie d'un poligono regolare.

Per aver la misura di un poligono regolare, si potrà impiegare il metodo di già dato (Artic. XIII.) per tutte le figure rettilinee. Ma facile è l'accorgersi, che il più corto è di dividere il poligono in triangoli uguali, i quali abbiano tutti il centro C per sommità. Perchè prendendo un di questi triangoli; per esempio CBD, e tirando sù la base BD la perpendicolare CK, la quale in tal caso si chiama l'apotema del poligono; siccome l'area del triangolo è uguale al prodotto della base BD per

FIG. X.

L' apotema è la perpendicolare tirata dal centro della figura ad uno de' suoi lati.

per la metà di CK; queſto prodotto tante volte preſo, quanti ſono i lati del poligono, darà l'area di tutta la figura.

XXIII.

Se uno divide la circonferenza del circolo in tre parti uguali, formerà un triangolo chiamato equilatero. Se divide queſta circonferenza in quattro parti uguali, formerà un quadrato, ma queſte due figure le più ſemplici di tutti i poligoni poſſono facilmente deſcriverſi ſenza, che ſia neceſſario d'aver ricorſo alla diviſione del circolo: ciò, che s'è già veduto (Artic. IX.) nel quadrato. A riſguardo del triangolo equilatero egli è facile di vedere, che per deſcriverlo sù una baſe data AB e' biſogna, che da' punti A, e B come centri, e con un'apertura di compaſſo eguale ad

Il triangolo equilatero è quel, che ha tutti tre i lati uguali.

FIG. XI.

Maniera di deſcriverlo.

ad AB, si descrivano gli archi DCF, e GCH, e che da' punti A, e B si tirino le linee AC, BC al punto C, sezione comune de' due archi DCF, GCH, e sommità del triangolo.

X X I V.

Potrei io quì al metodo di descrivere geometricamente il triangolo equilatero, e il quadrato, i primi di tutti i poligoni, aggiungere il metodo di descrivere geometricamente un pentagono, come più Autori han fatto negli elementi, che ci hanno dati. Ma perchè i principianti, per i quali soli noi quì lavoriamo, non potrebbero comprendere, che con fatica il filo, che deve seguir la mente, cercando la maniera di descrivere questa figura; ciò, che facilmente può fare l'Algebra, noi ci crediamo obbligati di rimettere la descrizione

del

del pentagono al trattato, che ſeguirà dopo queſto, e nel quale ſi metterà queſta deſcrizione coll'altre di tutti i poligoni, i quali abbiano un maggior numero di lati, e che ſenza il ſoccorſo dell'Algebra non potrebbero eſſer deſcritti geometricamente.

De' poligoni, i quali hanno più di cinque lati, e che io dico non poterſi deſcrivere, che adoprando il calcolo algebraico, biſogna eccettuare quello di 6. lati, di 24., di 48. &c., e quelli di 8., di 16., di 32., di 64.&c., i quali ſi poſſono facilmente deſcrivere col metodo, che ci dà la Geometria Elementare, come ſi vedrà al fine di queſta prima parte.

X X V.

Io ritorno alla miſura de' terreni, e io ben vedo, che quelli, che ſi devono

vono misurare: che sono talvolta fatti in maniera, che non si possono mettere in pratica le operazioni descritte da' metodi precedenti.

FIG. XII. Io suppongo, che ABCDE sia la figura di un campo di un recinto &c., di cui si vuol la misura. Secondo quello, che si è veduto, bisognerà dividere ABCDE in tanti triangoli, come ABC, ACD, ADE: indi misurare questi triangoli dopo aver calate le perpendicolari EF, CH, BG. Ma se dentro lo spazio ABCDE si trovasse qualche ostacolo, come un rialto, un bosco, un lago &c., il quale impedisca, che non si possa tirar le linee, che sono necessarie, che si dovrà egli fare allora? qual metodo bisognerà seguitare per rimediare a questo incomodo, che reca il terreno? Quel, che si presenta subito alla mente

mente, è di sciegliere qualche terreno piano, sul quale si possano fare facilmente quelle operazioni, e di descrivere sù questo terreno de' triangoli eguali, e simili a' triagoli ABC, ACD &c. Vediamo, qual'artifizio si debba usare per formare li nuovi triangoli.

XXVI.

Cominciamo dal supporre, che l'ostacolo si trovi dentro il triangolo ABC, di cui sieno noti i lati, e che si voglia delineare un triangolo eguale, e simile sul terreno, che si è scelto per quest' opera. In primo luogo si tirerà una linea DE uguale al lato AB, prendendo ancora una corda della lunghezza BC, e fissando una delle sue estremità in E, si descriverà l'arco IFG, che avrà la corda per raggio, e per mezzo di un'altra corda

TAVOLA III. FIG. I.

Sapendo tre lati di un triangolo fare un altro triangolo a quello uguale

da presa eguale ad AC, e di cui parimente si attaccherà un de' capi in D, si segnerà l'arco KFH, il quale dividerà l'altr'arco al punto F: tirando allora le linee DF, FE, si avrà un triangolo DEF uguale, e simile al triangolo proposto ABC; ciò, che è evidente. Perchè i lati DF, ed EF, che si uniscono al punto F, essendo eguali respettivamente a' lati AC, e BC, che concorrono insieme al punto C, ed essendo presa la base DE, uguale ad AE, non sarebbe possibile, che la posizione delle linee DF, ed EF sù DE fosse differente dalla posizione delle linee AC, e BC sù AB. E' vero, che si potrebbero prendere le linee DFE al disotto di DE, ma il triangolo si troverebbe essere il medesimo, e solamente sarebbe rovesciato.

XXVII.

XXVII.

Se non si potesse misurare, che due soli lati del triangolo ABC, per esempio i lati AB, BC, egli è chiaro, che con questo solo non si potrebbe determinare un secondo triangolo uguale, e simile ad ABC. Perchè, ancorchè si fosse preso DE, uguale a BC, e DF, uguale a BA, non si saprebbe, qual posizione dare a questa quì, rispetto all'altra. Per togliere questa difficoltà, il ripiego, che si presenta, è facile. Si fa pendere DF nella medesima maniera sù DE, che AB pende sù BC, o secondo l'espressione Geometrica si dà all'angolo FDE la medesima apertura, che all'angolo ABC.

FIG. III. e IV.

Un angolo è l'inclinazione d'una linea all'altra linea.

XXVIII.

Per fare questa operazione si prende un'istrumento, come *abc*, composto

Maniera di fare un angolo uguale ad un altro.

posto di due righe, che possano girare intorno a *b*, e si posano queste righe sù i lati AB, e BC. In questa maniera esse fanno tra loro l'angolo medesimo, che i lati AB, BC. Collocando dunque la riga *bc* sulla base DE in maniera, che il centro *b* risponda al punto D, e che l' istrumento resti sempre aperto a un modo, la riga *ab* darà la posizione della linea DF, la quale farà colla linea DE l'angolo FDE uguale all'angolo ABC. Ma la linea DF era stata presa della medesima lunghezza, che BA. Dunque non si dovrà fare altro, che tirare per F, e per E la retta FE, per avere il triangolo FED intieramente uguale, e simile al triangolo ABC. Pratica semplicissima, che suppone questo principio evidente, che un triangolo è determinato per la lunghezza

Essendo dati due lati, e l' angolo da essi compreso, è determinato il triangolo.

ghezza de' ſuoi due lati, e per le loro aperture; ovvero quel, che torna al medeſimo, che un triangolo è uguale a un'altro, allorchè due de' ſuoi lati ſono reſpettivamente uguali, e che l'angolo compreſo tra queſti lati è ugualmente aperto.

XXIX.

Si potrebbe ancora fare l'angolo FDE uguale all'angolo ABC nella maniera ſeguente. Dal centro B, e da un'intervallo qualunque B *a* deſcrivete un'arco *a b c*. Così dal centro D, e dal medeſimo intervallo deſcrivete l'arco *e i f*: voi non dovrete allora far altro, che cercare un punto *f*, che ſia poſto ſull'arco *e i f* nella maniera medeſima, che *a* ſi troverà collocata ſull'arco *c b a*. Or voi troverete facilmente il punto *f*, ſervendovi della retta *a c*, che ſecondo la

FIG. V. e VI.

Seconda maniera di fare un angolo uguale ad un altro.

La corda di un arco di un circolo è la retta, che è terminata dalle due eſtremità dell'arco.

la definizione ordinaria si chiamerà la corda dell'arco *a b c*. Perchè se dal centro *e*, e da un' intervallo uguale ad *a c*, voi descrivete l'arco *l f k*, l' intersezione de' due archi *e i f*, *l f k*, vi darà il punto cercato *f*.

Così tirate per D, e per *f* la linea D *f* F, voi avrete l'angolo FDE, uguale all'angolo ABC. Ciò, che è evidente (Artic. XXVI.) poichè li triangoli B*ac*, D*fe* saranno affatto uguali, e simili in tutte le loro parti.

XXX.

Fig. III. e IV.

Due angoli ed un lato determinano il triangolo.

Quando si vuol fare il triangolo FDE uguale al triangolo ABC, se avviene, che non si possa misurare altro, che uno de' suoi lati, per esempio BC, si ricorre agli angoli ABC, ed ACB. Avendo fatto DE uguale a BC, si pongon le linee FD, e FE in

in modo, che facciano con DE li medesimi angoli, che AB, ed AC fanno con BC. Allora col rincontro di queste linee si ha il triangolo FDE uguale, e simile al triangolo ABC. Il principio, che suppone questa operazione, è pure così semplice, che non ha bisogno di dimostrazione.

XXXI.

Se de' tre lati del triangolo ABC, non si può misurare, che la base BC, e si sa, che questo triangolo è isosceles, cioè, che i due lati AB, ed AC sono eguali, è evidente, che basta misurare uno de' due angoli ABC, ACB, perchè allora l'altro sarà a quello uguale. Se ne vede facilmente la ragione, se uno sa rappresentarsi quel, che avverrebbe, supponendo, che i due lati AB, AC del triangolo ABC fossero soprapposti sù BD, e sù CE,

FIG. VII.

Il triangolo isosceles è quello, che ha due lati uguali.

D linee

linee nate dal prolungarsi la base BC, e che poi uno li alzasse per unirli al punto A, perchè allora l'ugualità di questi due lati sarebbe, che in così unirsi, non sarebbe uno più di cammino dell'altro. Dunque essendo così uniti, saranno egualmente inclinati verso la base BC. Dunque l'angolo ABC sarà uguale all'angolo ACB.

Gli angoli, che questi due lati fanno con la base, sono tra loro eguali.

XXXII.

Per tornare alla misura de' terreni, si vedrà, che qualunque sieno gli ostacoli, che si possano trovare nel di dentro di loro, e' sarà facile col metodo precedente di trasportare sù un terreno libero tutti li triangoli, i quali dividono lo spazio, che si vorrà misurare.

FIG. VIII.

Supponghiamo per esempio, che voi vogliate misurare una selva di questa figura ABCDEFG. Primieramen-

ramente voi prenderete un triangolo eguale ad ABC, ciò, che potrete fare ſenza entrare nelle parti interne del triangolo, miſurando i due lati AB, BC, e l'angolo compreſo CBA.

Queſto triangolo così deſcritto darà l'angolo BCA, e la lunghezza di AC, e ſiccome voi potrete miſurare il lato eſteriore DC, voi avrete nel triangolo CAD i lati DC, e CA. Quanto all'angolo DCA, voi lo troverete, pigliando l'angolo IKL, uguale all'angolo DCB, e inſieme l'angolo LKO, uguale all'angolo BCA, e con ciò avrete l'angolo IKO uguale all'angolo cercato DCA.

FIG. VIII. e IX.

Eſſendo così determinato il triangolo ADC da due lati DC, e CA, e dall'angolo DCA compreſo da' loro, voi conoſcerete nella medeſima

maniera il triangolo DAG, ed il rimanente della figura.

XXXIII.

Il metodo dato per misurare quei terreni, dentro li quali non si può operare col tirar delle linee, spesso incontra nella pratica grandissime difficoltà. Poche volte si trova uno spazio unito, e libero, assai grande per fare de' triangoli uguali a quelli del terreno, che si vuol misurare. E quando pure si trovi la gran lunghezza de' lati de' triangoli, può rendere le operazioni molto difficili: e difficile senza dubbio, e forse impossibile sarebbe calare, per esempio, una perpendicolare sù una linea da un punto, che è lontano 500. canne. E' necessario dunque l'avere un mezzo, che supplisca a queste operazioni.

TAVOLA IV. Questo mezzo si offerisce da se medesi-

desimo, e subito viene in capo ad ognuno, il rappresentare la figura ABCDE, che si ha da misurare per una figura simile *abcde* più piccola, nella quale verbigrazia il lato *ab* sia di 100. dita, se il lato AB è di 100. canne, il lato *bc* di 45. dita, se BC è di 45. canne, e così di conchiudere, che se la stesa della figura ridotta *abcde* è di 60000. dita quadrate, quella della figura ABCDE deve essere di 60000. canne quadrate.

FIG. I. e II.

Ma prima di ogni altra cosa bisogna sapere, in che consiste la moltitudine di due figure.

XXXIV.

Per poco, che un vi rifletta, riconoscerà subito, che due figure ABCDE *abcde* per essere simili, devono essere tali, che gli angoli A, B, C, D, E, della grande sieno ugua-

In che consiste la similitudine di due figure.

li agli angoli *a*, *b*, *c*, *d*, *e* della piccola, e di più, che i lati *ab*, *bc*, *cd* &c. della piccola contengono altrettante parti *p*, quante parti P contengono i lati AB, BC, CD&c. della grande.

XXXV.

Per esprimere questa seconda condizione i Geometri dicono, che è necessario, che i lati AB, BC, CD&c. sieno proporzionali a' lati *ab*, *bc*, *cd*, ovvero, che il lato AB contenga *ab*, nella maniera medesima, che BC contiene *bc* &c., ovvero, che il lato AB sia tanto grande rispetto ad *ab*, quanto l'è BC per rapporto a *bc* &c., o ancora che vi sia la stessa ragione, o rapporto tra AB, ed *ab*, che tra BC, e *bc* &c., o finalmente, che AB sia ad *ab*, come BC a *bc* &c. Tutte maniere da esprimere la medesima cosa, ma che bisogna rendersele famigliari,

gliari, per intendere la lingua de' Geometri.

XXXVI.

Maniera di descrivere una figura simile ad un'altra.

Dopo aver veduto, in che consiste la similitudine di due figure, cerchiamo, quale sia la maniera, che ci ha la natura stessa indicato per descrivere una figura simile ad un'altra. Rappresentiamoci uno, che disegna, e vuole così di grande in piccolo copiare una figura.

Primieramente prendendo *ab* per rappresentare la base AB della figura ABCDE, che ha da copiare, piega egli sù *ab* i lati *ae*, e *bc* nella medesima maniera, che AE, e BC sono piegati sopra AB, osservando, che le lunghezze di *ae*, e *bc* sieno a quelle di *ab*, come le lunghezze AE, e BC sono alla lunghezza AB; cioè a dire, che se per esempio AE è la me-

tà di AB, fa pure *ae* metà di *ab*; e nel modo medeſimo determina la lunghezza di *bc* relativamente a BC.

Secondariamente, dopo aver così determinati i punti *e*, e *c*, e' tira due linee *cd*, e *cd*, che piega ſopra *ca*, e ſopra *cb*, nella medeſima maniera, che ED, e CD ſono piegate ſopra EA, e ſopra CB, e prolungando queſte linee fino, ch'eſſe ſi rincontrano in *d*, e' finiſce la ſua figura *abcde*.

XXXVII.

Ora ſe uno conſidera queſta coſtruzione, vedrà, che ella non è appoggiata, che ſull' egualità, ch'è tra gli angoli E, A, B, C, e *e*, *a*, *b*, *c*, e ſulla proporzionalità de' lati EA, AB, BC co' lati *ea*, *ab*, *bc*, e così ſi trova la figura compita, ſenza che ſi ſia preſo l'angolo *d*, eguale all'angolo D, ed i lati *cd*; *cd* proporzionali

nali a' lati ED, CD : Questa con-
siderazione potrebbe fare al primo
temere, che l'angolo *d* non fosse in
effetto eguale all'angolo D, ed i la-
ti *ed*, *cd* non fossero proporzionali
a' lati ED, CD, e conseguentemen-
te la figura *abcde* non si trovasse simi-
le perfettamente alla figura ABCDE:
ma questo dubbio può ben tosto dis-
siparlo l' esperienza: oltrechè per po-
co, che uno usi di attenzione, si ac-
corge, che dall' egualità respettiva
de' quattro angoli E, A, B, C, e *e*,
a, *b*, *c*, e dalla proporzionalità dei
tre lati EA, AB, BC, ed *ea*, *ab*,
bc, risulta necessariamente l' eguali-
tà degli angoli D, *d*, e la proporziona-
lità de' lati ED, CD, ed *ed*, *cd*.

Contuttociò per estinguere ogni
sospetto, facciamo vedere, che tut-
te le condizioni, che domanda la si-
mili-

militudine delle figure, sono necessariamente dipendenti l' une dall'altre; il che ci sarà facile di fare, esaminando li triangoli, che sono figure le più semplici, e che devono assolutamente entrare nella composizione delle altre: e questo esame ci condurrà a tutte le proprietà, e a tutti gli usi delle figure simili.

XXXVIII.

Fig. III. e IV.

Se due angoli di un triangolo sono eguali a due angoli di un'altro triangolo, il terzo angolo dell'uno sarà uguale al terzo dell'altro.

Supponghiamo, che sulla base *ab* si costruisca il triangolo *abc*, non prendendo, che gli angoli *cab*, *cba* uguali agli angoli CAB, CBA del triangolo ABC, primieramente è certo, che il terzo angolo *acb* sarà uguale al terzo angolo ACB.

Perchè sia collocato il triangolo *a b c* sul triangolo A B C in modo, che 'l punto *a* si trovi sul punto A, *ab* sù AB, *ac* sù AC, egli è chiaro, che

che *cb* sarà parallelo a CB. Imperocchè prolungato il lato *cb*, non potrà questo incontrarsi nel lato CB, che non pendano le due linee inegualmente sù AB, e per conseguenza, che gli angoli *cba*, e CBA sieno ineguali, ciò, che è contro la supposizione fatta.

Siccome dall' ugualità degli angoli *cba*, CBA ne segue, che le linee *cb*, CB sieno parallele; così dal parallelismo di queste linee ne seguirà, che gli angoli *acb*, ACB saranno uguali; quel, che si doveva provare.

XXXIX.

Facciamo ora vedere, che i lati corrispondenti ne' due triangoli *acb*, e ACB, i quali hanno i medesimi angoli, sono proporzionali.

Due triangoli, che hanno i rispettivi angoli uguali, avranno ancora i lati proporzionali.

Per fissar l'immaginazione, supponghiamo, che *ab* sia la metà di AB, bisognerà, che noi proviamo, che

così

così pure *ac* sarà la metà di AC, e *bc* la metà di BC. Avendo *acb*, secondo l'Articolo precedente, la posizione di A*cb*, se uno tira *cg* parallela ad AB, è chiaro, che questa linea sarà uguale a *b*B, ovvero ad A*b*, e che *g* B sarà pure uguale a *cb*; ora come gli angoli *c g* C, e C *c g* sono evidentemente uguali agli angoli *cb*A e *c* A *b*, il triangolo C*cg* sarà uguale al triangolo *c* A *b* (Artic. XXX.), dunque si avrà C *c* uguale ad A *c*, e C*g* uguale a *c b*, ovvero a *g* B. Dunque A *c*, ovvero *a.c* sarà la metà di AC, e *c b* la metà di CB.

FIG. III. e V. Se *ab* fosse la terza, o quarta parte, o qualsisia altra di AB, e' sarebbe egualmente facile di dimostrare, che *ac* pure sarebbe il medesimo numero di volte contenuta in A C, e *cb* in CB. Perchè da' punti di divisione

ſione *b*, *f*, della baſe AB; tirando *bc*, *fh* &c. parallele a BC, ſi potrà porre lungo di AC tre, quattro &c. triangoli A*cb*, *chg*, *h*C*i* &c. eguali al triangolo *acb*.

Che ſe *ab* in luogo di eſſere contenuta eſattamente in un certo numero di volte in AB, non vi foſſe contenuta, che con qualche frazione, come per eſempio due volte, e mezza; ſi proverà, che *ac* ſarà così contenuta due volte, e mezza in AC, e *bc* due volte, e mezza in BC.

Perchè, dopo che per mezzo delle parallele *bc*, *fh*, ſi avrà collocato lungo di AC, i due triangoli A*cb*, *chg*, uguali ad *acb*, vi rimarrebbe tra le due parallele *hf*, e CB, come collocare un triangolo C*hi*, i lati del quale ſarebbero la metà de' lati di *c*A*b*: ciò, che è evidente; poichè per quel-

quello, che si è supposto, *f*B sarebbe la metà di A*b*, e la base *b i* del triangolo C*bi* sarebbe uguale a *f*B, a cagione delle parallele *b f*, CB. Dunque in generale, quando due triangoli ABC, *abc* hanno i medesimi angoli, questi triangoli, che si chiamano triangoli simili, hanno i loro lati proporzionali, o quel, che torna al medesimo, i lati AB, BC, AC d' uno di questi triangoli ABC contengono il medesimo numero di parti P, che i lati *ab*, *bc*, *ac* dell'altro triangolo *abc* contengono di parti *p*, essendo P il piede, la canna &c., ovvero in generale la scala, colla quale ABC è stato descritto, e *p* quella, che si è adoprata costruendo *abc*.

X L.

Dalla proposizione, che noi abbiamo dimostrato, si tira naturalmente

mente la ſoluzione di un problema ſpeſſo utile nella pratica.

Si dimanda, che una linea ſia diviſa in un numero dato di parti uguali. Queſto ſi potrebbe veramente ottenere a caſo, col provare, e riprovare tante volte, finchè uno s'imbatteſſe nella giuſta miſura: ma non mai ſi avrebbe con quella certezza, con cui lo dà la preciſion Geometrica.

Dividere una linea in quante parti uguali uno vorrà.

Supponghiamo per eſempio, che ſi abbia a dividere AB in tre parti uguali; ſi comincia col tirare una linea indefinita AC, che faccia un'angolo qualunque con AB, e ſi pigliano sù queſta linea tre parti uguali A *c*, *c b*, *b* C, con una apertura di compaſſo preſa ad arbitrio, indi ſi tira CB, e medeſimamente le parallele *c b*, *b f* a queſta linea. Così AB diviſa a' punti *b*, e *f* ſi trova diviſa in

FIG. V.

in tre parti uguali, ciò, che è chiaro per l'Articolo precedente.

XLI.

Cosa sia una linea quarta proporzionale a tre altre, e come si trovi.

Fig. VI.

Se si volesse dividere una linea in un tal numero di parti, che abbia de' rotti, come due, e mezzo, tre, e un quarto &c., ovvero se uno si proponesse in generale di dividere la linea AB a un punto *b*, in maniera, che AB sia ad A*b*, come la linea NO alla linea MQ, si vede subito, che la soluzione del problema dipenderebbe dall'Articolo XXXIX., cioè, che bisognerebbe tirare per A una retta qualunque; prendere sù questa A *c*, ed AC uguali a MQ, ed a NO, ed insieme tirare *cb* parallela a CB: ed allora il punto *b* sarà il punto cercato.

I Geometri enunciano questo problema così; trovare una linea quarta proporzionale a tre linee NO, MQ, AB.

XLII.

XLII.

Egli è evidente, che due triangoli simili ABC *abc* avranno non solamente i loro lati proporzionali; ma che le perpendicolari CF, e *cf*, che si caleranno dalla sommità C, *c* sulle basi AB, *ab* seguiranno ancora le proporzioni de' lati: ciò, che è sì facile a dimostrare per ciò, che si è detto, che non dobbiamo quì punto fermarci,

Fig. VII. VIII.

Le altezze de' triangoli simili sono proporzionali a' loro lati.

XLIII.

Quanto alle aree de' triangoli simili ABC, *abc*, si vede, che quella del primo conterrà altrettanti quadrati X fatti sulla misura P, quanti quadrati *x* l'area del secondo, fatti sulla misura *p*. Perchè, siccome per l'Articolo precedente, CF, ed AB avranno altrettante parti P, che *cf*, ed *ab* parti *p*; la metà del prodotto

di CF per AB, misura di ABC (Artic. XIV.) darà il medesimo numero, che quello, che risulterà dalla metà del prodotto *cf* per *ab* misura di *abc* con questa differenza, che CF, ed AB contandosi per via di parti P, il lor prodotto si conterrà per mezzo de' quadrati X: dovechè *cf*, ed *ab*, che si contano in parti *p*, daranno un prodotto, che si conterà in quadrati *x*.

XLIV.

Le aree de' triangoli simili sono, come li quadrati de' lati omologhi.

Quello, che abbiamo detto sulla misura de' triangoli simili, serve di prova ad una proposizione, che negli Elementi di Geometria si suol proporre così. I triangoli simili ABC, *abc* sono tra loro, come i quadrati ABDE, *abde* de' loro lati omologhi, o corrispondenti AB, *ab*.

La dimostrazione dell'Articolo preceden-

cedente conduce a questa conseguenza. Perchè il quadrato ABDE contenendo altrettanti quadrati X, quanti quadrati *x* contiene il quadrato *abde*; egli è evidente, che i due numeri de' quadrati X, che esprimono il rapporto del triangolo ABC al quadrato ABDE, sono i medesimi, che i numeri de' quadrati *x*, che danno il rapporto del triangolo *abc* al quadrato *abde*, o quel, che torna al medesimo, che il triangolo ABC è al quadrato ABDE, come il triangolo *abc* al quadrato *abde*.

Di là ne segue, che se per esempio il lato AB era doppio del lato *ab*, il triangolo ACB sarà quadruplo del triangolo *acb*: e che se AB era triplo di *ab*, il triangolo ACB sarà nove volte maggiore del triangolo *acb* &c.; perchè AB non può essere doppia di

ab, che il quadrato ABDE non ſia quadruplo del quadrato *abde* &c.

X L V.

Fig. I. e II. *della medeſima Tavola.*

Ora per paſſare da' triangoli alle altre figure; ſupponghiamo, che a ciaſcuno de' triangoli ſimili ABD, *abd* ſi congiungano due altri triangoli ADE, e BDC, *ade*, e *bdc*, li due primi ſimili a queſti altri due; ſi vedrà, che nelle figure totali ABCDE, *abcde*.

Proprietà delle figure ſimili ricavate da quelle de' triangoli,

1. Gli angoli A, B, C, D, E, ſaranno i medeſimi, che gli angoli *a*, *b*, *c*, *d*, *e*; ciò, che è manifeſto; perchè gli uni, e gli altri ſaranno o angoli corriſpondenti de' triangoli ſimili, o angoli compoſti da queſti angoli corriſpondenti.

2. Si vedrà, che la relazione dei lati omologhi, o corriſpondenti DE, *de*, BC, *bc* &c. nelle figure ABCDE,

abcde

abcde farà necessariamente la medesima, cioè, che se, per esempio, P entra un tal determinato numero di volte nella base AB, e p questo medesimo numero di volte in $a\,b$, P, e p entreranno le volte medesime ne' due lati omologhi qualunque DE, e *de*. Perchè per la similitudine dei triangoli ABD, *abd* la quantità di P, che conterrà AD, sarà uguale alla quantità di p contenuta in $a\,d$, e riguardando questi lati, come le basi de' triangoli simili ADE, *ade*, il numero delle parti P, che entrano in DE, sarà il medesimo, che delle parti p contenute nel lato *de*.

3. Si vedrà ancora, che se nelle due figure vi si tira delle linee, che sieno corrispondenti, come CE, *ce*, e le perpendicolari DF, $d\,f$ &c., queste linee saranno sempre tra loro nel-

Le figure simili non differenti, che per le scale, su cui sono state costruite.

delle figure simili, si può ridurre a questo solo, ed unico principio; che le figure simili non sono differenti tra loro, che secondo la scala, sù cui sono state fatte.

X. L I. X.

Ora per meglio vedere l'uso, che si deve fare de'triangoli simili, e delle riduzioni, per aver la misura dei terreni, su'quali non si potrebbe comodamente operare, figuriamoci, che ABCDEF rappresenti il recinto di un parco, di uno stagno &c., del quale si voglia determinare la stesa. Primieramente si misurerà uno de'lati della figura, per esempio, FE, e si vedrà, quanto avrà questo lato di canne, o di pertiche &c.; e prendendo, che scala uno vorrà, si tirerà sù un cantone, o carta una linea *fe* uguale a tante parti della scala, quante perti-

TAVOLA V. FIG. I. e II.

pertiche, o canne conterrà FE: poi facendo gli angoli *def*, *dfe* uguali agli angoli DEF, DFE, si avrà il triangolo *edf*, nel quale si calerà *eg* perpendicolare sù *df*. Fatto ciò, e misurate per mezzo della scala le linee *df*, ed *eg*, si conchiuderà, che quante parti conterranno queste linee, altrettante pertiche, o canne &c. conterranno DF, ed EG. Così moltiplicando DF per la metà di EG, si avrà il valore del triangolo EDF; e misurando nell'istessa maniera gli altri triangoli DCF, BCF, ABF, si troverà determinata l'intera area della figura.

L.

Maniera di misurare la distanza di un luogo inaccessibile.

Accade spesso nella pratica, che bisogna misurare la distanza di un luogo F, dentro la quale o vi è qualche altro luogo, o qualche ostacolo impe-

impedisce, che non vi si possa la persona accostare: nuovo problema, ma del quale già abbiamo dato anticipatamente la soluzione nell' Articolo precedente. Perchè non avendosi per misurare DF bisogno d' altro, che della similitudine de' triangoli *def*, e DEF; egli è chiaro, che se uno misura una qualunque base EF, e che da' punti F, ed E si possa avere il punto D, il problema sarà risoluto; cioè a dire, si avrà la distanza FD.

L I.

FIG. III.

L'uso, che si può fare degl' istrumenti particolari, come *b*A*c*, di cui io ho già parlato (Artic. XXVIII.) composto di due regoli uniti al punto A, intorno al quale girano liberamente, soggiace spesso, e facilmente a degli sbagli. Ora l'apertura dell'angolo si altererà nel trasportarsi;

ſi; ora la forma, che uno è obbligato di dare all'iſtrumento per facilitarne l'uſo, impedirà, che non poſſa venire applicata ſul piano, ove dovrà farſi la riduzione.

Aggiungiamo a queſto, che ciaſchedun'angolo nuovo BAC, che in queſta maniera ſi prende, richiede, che ſi traſporti di nuovo l'iſtrumento ſulla carta; e l'unica via, che c'è, per paragonare tra loro due angoli, è di poſare l'uno ſopra l'altro, ſenza che per queſto mezzo ſi poſſa aver giuſtamente il loro rapporto, o la loro grandezza aſſoluta.

L I I.

Dunque era neceſſario di cercare una miſura fiſſa per gli angoli, come già v'era per miſurar le lunghezze: e queſta fu facile a trovarſi. Perchè facendo reſtare fiſſo A*b*, gli ſi ap- FIG. IV. plichi

plichi il lato A*c*, ed insieme si faccia questo girare intorno ad A: è chiaro, che se si pone all'estremità *c* del lato mobile A*c* o una penna, o uno stile, in maniera da render sensibile la traccia del punto *c*; questa traccia, che formerà un'arco di circolo, darà l'esatta misura dell'angolo, per ciascuna apertura particolare de' lati A*b*, A*c*: cioè a dire, che a causa dell' uniformità della curvatura del circolo, succederà necessariamente, che a un' apertura dupla, tripla, quadrupla di *c*A*b* risponderà un' arco duplo, triplo, quadruplo di *cb*.

Un' angolo ha per misura l' arco di circolo compreso tra suoi lati.

L I I I.

Supponendo dunque, che la circonferenza *bcdfg*, descritta dalla rivoluzione intera del punto *c*, sia divisa in un numero qualunque di parti uguali; il numero delle parti

conte-

contenute dall'arco, che comprendono le linee A *c*, ed A *b*, misurerà esattamente l'apertura di queste linee, o l'angolo *c* A *b*, ch'esse formano.

I Geometri son convenuti di dividere il circolo in 360. parti, che si chiamano gradi, ciascun grado in 60. minuti, ciascun minuto in 60. secondi &c. Così un angolo *b*A*c*, per esempio, sarà di 70. gradi, 20. minuti, se l'arco *bc*, che gli servirà di misura, comprenderà 70. delle 360. parti del circolo, e di più 20. sessantesime parti di un grado.

Il circolo è diviso in 360. gradi; ciascun grado in 60. minuti &c.

L I V.

Di là ne segue, che un angolo CAB di 90. gradi, chiamato comunemente angolo retto, è quello, di cui i lati AC, e AB comprendono BC un quarto della circonferenza, e sono perpendicolari l'uno all'altro.

Fig. V.

L'angolo retto ha 90. gradi, ed i suoi lati sono perpendicolari l'un all'altro.

Si

L V.

L'angolo acuto è quel, che è minore del retto.
FIG. VI.

Si chiama angolo acuto ogni angolo, che sia più picciolo di un angolo retto, cioè minore di 90. gradi. Tali sono gli angoli CAB, FAG, EAG.

L V I.

Un'angolo ottuso è quel, che è maggiore del retto.

Al contrario si chiama angolo ottuso quello, che ha più di 90. gradi, come FAB.

L V I I.

La somma degli angoli fatti dalla medesima parte su una retta, e che hanno il medesimo vertice, comprende 180. gradi.

Egli è evidente, che tutti gli angoli, come GAF, FAE, EAC, CAB, che si possono fare dalla medesima parte su una retta GB, e che hanno il medesimo vertice A, presi insime sono eguali a 180. gradi, ovvero a due angoli retti, misurati dalla metà della circonferenza.

L V I I I.

FIG. VII.
Tutti gli angoli, che si possono fare in-

Così pure la somma di tutti gli angoli EAF, FAB, BAC, CAD, DAE, che

che si possono fare intorno ad un punto A, che serve loro di vertice comune, è uguale a 360. gradi, ovvero a quattro angoli retti misurati dalla circonferenza intera BCDEF.

intorno ad un medesimo punto presi insieme sono uguali a quattro retti.

L I X.

Dopo aver trovato, che gli angoli hanno le parti del circolo per misura, vediamo, come questa misura si prende, per vedere, quanti gradi contiene un'angolo, che si ha da misurare.

Si adopra un istrumento I, che si chiama semicircolo. Quest'istrumento è composto di due righe EAC, DAB, d'egual lunghezza, che s'incrociano in A, e che hanno nelle loro estremità alcuni traguardi: una di queste righe EC è mobile intorno ad A, e l'altra DB è fissa, e serve di diametro al semicircolo DCB diviso in 180. gradi &c.

FIG. VIII.

Vo-

Volendosi sapere l'angolo, che formano due linee rette tirate dal luogo, dove uno è, a due oggetti, qualunque F, G; si mette la riga fissa DAB in maniera, che l'occhio posto in D, veda uno de' due oggetti per i traguardi D, e B: nel medesimo tempo, senza muovere l'istrumento, si gira l'altra riga mobile, fino che l'occhio collocato in E, vede l'altro oggetto G per i traguardi E, e C; ed allora la riga mobile mostra sul semicircolo diviso in gradi, il numero de' gradi, minuti &c., che contiene l'angolo proposto GAF.

L X.

Uso di un istrumento per fare un'angolo di un numero determinato di gradi.

Se uno vuol fare sulla carta un angolo di un numero determinato di gradi, si adopra un istrumento K, diviso in 180. gradi, posando il centro A sulla punta dell'angolo, che si vuol fe-

ſegnare, e la linea AB ſulla linea AG, che ſi prende per un de' lati dall' angolo, ſi nota il punto C, che corriſponde al numero de' gradi, che ſi vuol dare all' angolo propoſto; poichè per queſto punto, e pel centro A tirando la linea ACO, ſi avrà l'angolo OAG, che contiene il numero richieſto de' gradi.

L X I.

Supponghiamo ora, che avendo preſo una baſe FG ſulla carta, ſi voglia fare sù queſta baſe un triangolo FGH ſimile al triangolo ABC preſo sù un terreno; ſi metterà in uſo il ſemicircolo per ſapere, quanti gradi contiene ciaſcuno degli angoli CAB, CBA; e coll'altro iſtrumento ſi faranno gli angoli HFG, e HGF reſpettivamente uguali agli angoli CAB, e CBA: ed allora, perchè il punto H,

TAVOLA VI. FIG. I. e II.

F nel

nel quale ſi uniſcono i lati FH, e GH, ſarà neceſſariamente con queſta operazione determinato, e così pure l'angolo FHG, ſi avrà il triangolo FGH intieramente ſimile al triangolo ABC.

LXII.

Siccome importa moltiſſimo nella pratica, come abbiamo già detto, che gli angoli ſieno eſattamente miſurati, non biſogna contentarſi di prenderli cogl' iſtrumenti ancor più perfetti, biſogna ancora trovare il mezzo di verificare le loro miſure, per farne, ſe è neceſſario, la correzione. Or queſto mezzo è ſemplice, e facile. Riprendiamo il triangolo ABC. Si vede ſubito, che la grandezza dell'angolo C deve riſultare da quella degli angoli A, e B. Perchè ſecondo, che ſi accreſceranno, o ſi ſminuiranno queſti angoli, can-

cangierà ancor la posizione delle linee AC, BC, e conseguentemente l'angolo C, che queste linee fanno tra loro. Ora se quest'angolo dipende dalla grandezza degli angoli A, e B, si deve presumere, che il numero de' gradi, che contengono gli angoli A, e B, deve determinare il numero de' gradi, che deve contenere l'angolo C; e così potrà servire a verificare le operazioni, che saranno state fatte per determinare gli angoli A, e B, se misurando insieme l'angolo C, vi si trova il numero de' gradi, che li convengono relativamente alla grandezza degli angoli A, e B.

Per trovare, come dalla grandezza degli angoli, A, e B, si può ricavare quella dell'angolo C, consideriamo quello, che avverrebbe a

quest'angolo, se le linee AC, BC si avvicinassero, ovvero si scostassero l'una dall'altra. Supponghiamo per esempio, che BC girando intorno al punto B, si scostasse da AB per avvicinarsi a BE, egli è chiaro, che mentre BC gira intorno, l'angolo B continuamente và sempre più slargandosi; ed al contrario l'angolo C più, e più si serra, e diventa minore: quello, che potrebbe far presumere, che in questo caso la diminuzione dell'angolo C, fosse uguale all'accrescimento dell'angolo B, e che così la somma de' tre angoli A, B, C fosse sempre la medesima, in qualunque inclinazione delle linee AC, BC, sopra la linea AE.

FIG.III.

L X I I I.

FIG.IV.

Ora questa induzione così presunta porta con se la sua dimostrazione.

Per-

Perchè tirando ID, parallèla ad AC, ſi vedrà primieramente, che gli angoli ACB, e CBD, chiamati alterni, ſono uguali, ciò, che è evidente, poichè le linee AC, e IB eſſendo parallele, piegheranno egualmente sù CBO, e così l'angolo IBO, ſarà uguale all'angolo ACB. Ma ancora l'angolo IBO ſarà uguale all'angolo CBD: perchè la linea ID non piegherà più sù CO da un lato, che dall'altro. Dunque l'angolo DBC uguale all'angolo IBO, ſarà uguale all'angolo ACB ſuo alterno.

Gli angoli alterni ſono gli angoli oppoſti, che forma da una parte, e dall'altra una linea retta, che cade ſu due parallele.

Queſti angoli ſono uguali.

L X I V.

Si vedrà in ſecondo luogo, che l'angolo CAE ſarà uguale all'angolo DBE, per cauſa delle parallele CA, e DB. Dunque li tre angoli del triangolo potrebbero eſſere meſſi tutti accanto, ed uniti al punto B,

ed allora si vedrebbe, che li tre angoli DBE, CBD, e CBA, che sono uguali a' tre angoli CAB, ACB, CBA, sono parimente uguali a due angoli retti (Art. LVI.) e come tutto questo, che abbiamo detto, potrà nella medesima maniera applicarsi a qualunque triangolo, sarà uno sicuro di quella proprietà generale, che la somma de' tre angoli di un triangolo è costantemente la medesima, e che è uguale a due retti, o quello, che dice lo stesso, a 180. gradi.

La somma de' tre angoli di un triangolo è uguale a due angoli retti.

L X V.

Dunque per avere il valore del terzo angolo di un triangolo, quando uno ne avrà misurati due, basterà sottrarre da 180. gradi quel numero di gradi, che i due angoli fanno insieme. Proprietà, che dà una maniera assai comoda di verificar la misu-

misura degli angoli di un triangolo; e dà cui ne caveremo un'infinità di altre utilità di mano in mano, che anderemo innanzi. Noi quì ci contentiamo di tirare le conseguenze più immediate.

LXVI.

Un triangolo non può avere più d'un angolo retto, e per più forte ragione non potrà aver più d'un'angolo ottuso.

LXVII.

Se uno de' tre angoli di un triangolo è retto, la somma de' due altri angoli è sempre uguale a un retto.

Queste due proposizioni sono così chiare, che non hanno bisogno di dimostrazione.

LXVIII.

L'angolo esterno di un triangolo è uguale a' due angoli interni opposti.

Se si allunga uno de' lati del triangolo ABC, per esempio, il lato AB, l'an-

l'angolo esterno CBE sarà egli solo uguale a' due angoli interni opposti BCA, CAB. Perchè all'angolo CBA o si aggiungano li due angoli BCA, e CAB, o l'angolo CBE; la somma sarà sempre uguale a 180. gradi, cioè a due angoli retti (Art. LXIV.)

LXIX.

FIG. V.

Saputo uno degli angoli di un triangolo isoscele ABC, si sanno gli altri due.

Un angolo del triangolo isoscele da gli altri due.

Se uno sa l'angolo al vertice A, sottraendo il numero de' gradi, che contiene questo, da 180., misura di tutti e tre gli angoli del triangolo, la metà della somma, che resterà, sarà la misura di ciascuno degli angoli B, C, alla base.

Se questo, che si sa, è uno di questi angoli B, C, il doppio del suo valore sottratto da 180. gradi darà l'angolo al vertice A.

LXX.

L X X.

Gli angoli di un triangolo equilatero sono ciascuno di 60. gradi.

Come un triangolo equilatero non è altro, che un triangolo isoscele, al quale può ciascuno de' suoi lati servir di base, ogni suo angolo è di 60. gradi, un terzo di 180.

L X X I.

Descrizione dell'Esagono.

Di quì si ricava facilmente la descrizione dell'esagono, o poligono di sei lati, che noi abbiamo promesso (Art. XXIV.)

Perchè per trovare una linea, che divide la circonferenza in sei parti uguali, bisogna, che questa linea sia la corda di un'arco di 60. gradi, sesta parte di 360. valore della intera circonferenza. Supponendo dunque, che questa corda sia AB, e tirando dal centro I alle estremità A, e B, i raggi AI, e IB, l'angolo AIB sarà di

Fig. VI.

di 60. gradi; e perchè i due lati AI, e IB saranno uguali, il triangolo AIB sarà isoscele. Dunque 'l' angolo al vertice essendo di 60. gradi, ciascuno de' due altri angoli sarà pure così di 60. gradi, la metà di 120. Dunque (Artic. LXX.) il triangolo AIB sarà equilatero. Dunque AB sarà uguale al raggio del circolo. Donde ne segue, che per descrivere un'esagono, basta aprire il compasso con un' intervallo uguale al raggio, e questo applicare sei volte in giro alla circonferenza, ed in questo modo si avranno i sei lati dell' esagono.

L X X I I.

Descritto l' esagono ABCDEF, si descriverà facilmente il dodecagono, cioè il poligono di dodici lati.

Per

Per ciò fare, si dividerà l' arco AKB, ovvero l' angolo AIB in due parti uguali, ed AK corda della metà dell' arco AKB, sarà uno de' lati del dodecagono.

La metà dell' angolo al centro dell' esagono dà l'angolo al centro del dodecagono.

L X X I I I.

Per dividere l' arco AKB in due archi uguali AK, e KB, si opererà nella medesima maniera, che si opera per dividere la corda AB in due parti uguali; cioè che da' punti A, e B, come centri, e con un' intervallo qualunque, si descrivono gli archi MLN, OLP, e pel punto L sezione dei due archi, e pel centro I, si tira la linea LI, la quale dividerà in due e l' arco AKB, e la corda AB.

Dividere un' angolo in due angoli uguali.

L X X I V.

Seguendo il metodo precedente,

Descrizione de' poligoni di 24.,48.&c. lati.

te, e dividendo l'arco AK in due archi uguali, la corda di uno di questi sarà il lato di un poligono di 24. lati. Così si avranno i poligoni di 48., 96., 192. &c. lati.

LXXV.

Descrizione dell' ottogono.

Per descrivere un' ottogono, cioè un poligono di otto lati, si comincierà dal fare un quadrato dentro il circolo. Questo si ha col tirare due diametri AIB, CIE, che si seghino ad angoli retti, e col congiugnere le loro estremità, tirando le linee AC, CB, BE, AE.

FIG. VII.

Perchè per la regolarità del circolo, e per l' egualità de' quattro angoli formati dalle perpendicolari AIB, CIE, i quattro lati AC, CB, BE, EA, saranno necessaria-

riamente uguali, e si troveranno egualmente inclinati l' uno verso l' altro, ciò, che non può avvenire, che nel quadrato.

Descritto il quadrato, col metodo precedente si dividerà ciascun arco CKB, BLE &c. in due parti uguali: ciò che fatto, si avrà l' ottogono.

E de' poligoni a 16., 32. &c. lati.

Se uno divide pure ciascun' arco CK, KB &c., in 2., in 4., in 8. &c. parti uguali, si avranno i poligoni di 16., 32., 64. &c. lati.

ELE-

ELEMENTI DI GEOMETRIA.

PARTE SECONDA.

Del metodo Geometrico di paragonare le figure rettilinee.

E uno ha fatto attenzione a quello, che abbiamo detto per mostrare, come si è arrivato a misurare i terreni, avrà ancora veduto, che le posizioni delle linee tra loro ci somministra-

nistrano cose degne di essere osservate da se medesime, indipendentemente dall'utilità di quelle che ci possono essere nella pratica; e si può presumere, che queste appunto fossero quelle, che impegnassero i primi Geometri a portare più lontano le loro scoperte; non essendo solo il bisogno, e la necessità, ma sovente la curiosità ancora quella, la quale li spinge a fare nuove, ed attente ricerche.

Di più deve aver contribuito al progresso della Geometria il gusto, che si ha naturalmente per questa precisione rigorosa, senza la quale lo spirito non è mai soddisfatto.

E così allorchè misurando le figure si sono accorti, che in una infinità de' casi le scale, ed i semicircoli non davano, che valori approssimati delle linee, o degli angoli, hanno

no cercato metodi, che ſuppliſſero al difetto di queſt' iſtromenti.

Quì noi riprenderemo a conſiderare le figure rettilinee; ma nelle operazioni, che faremo per rinvenire i loro giuſti rapporti, non ci ſerviremo, che della riga, e del compaſſo.

Speſſo accade, che biſogna o unire in una figura più figure a lei ſimili, o riſolvere una figura in altre figure della medeſima ſpecie; ciò, che può farſi incominciando l'operazione ſu i rettangoli: poichè tutte le figure rettilinée non ſono, che aggregati di triangoli; e ciaſcun triangolo è la metà di un rettangolo, che ha la medeſima altezza, e la medeſima baſe.

I.

Per paragonare i rettangoli, biſogna

gna ſaper mutare un rettangolo qualunque in un'altro, che abbia la medeſima ſuperficie, ma una diverſa altezza. Perchè quando due rettangoli ſaranno mutati in due altri della medeſima altezza, non differiranno più che per le loro baſi; il più grande ſarà quello, che avrà la baſe maggiore, e conterrà il più piccolo nella maniera medeſima, che la ſua baſe contiene quella del rettangolo minore; ciò, che ſuole proporſi così. Due rettangoli, che hanno la medeſima altezza, ſono nella ragione medeſima delle loro baſi.

Due rettangoli, che hanno la medeſima altezza, ſono nella ragione medeſima delle loro baſi.

I I.

Per aggiungere un rettangolo di queſti due all'altro, non biſogna far altro, che porne uno a lato all'altro.

III.

Così pure facilmente si sottrarrà il più piccolo dal più grande.

IV.

E per partire un rettangolo in un numero determinato di rettangoli uguali, basta dividere la sua base in un egual numero di parti uguali, e insieme alzare delle perpendicolari sù i punti delle divisioni.

V.

TAVOL. VII. FIG. I.

Maniera di trasformare un rettangolo in un' altro, che abbia un'altezza data.

Sia ora proposto di trasformare il rettangolo ABCD in un'altro BFEG, che abbia la medesima superficie, e l'altezza BF. Si avvertirà, che, essendo il suo valore il prodotto della altezza per la base, è necessario, che il rettangolo cercato BFEG, l'altezza del quale sarà più grande di BC, abbia la sua base più piccola, che BA; cioè, che, se BF, per esempio, è doppia

pia di BC, bisogna, che BG non sia, che la metà di AB.

Se BF è il triplo di BC, BG non sarà, che il terzo di AB.

Si vedrà pure, che se BF in luogo di contenere BC esattamente un numero di volte, lo contenga con frazione; come due volte, e un terzo; il rettangolo BFEG non potrà essere eguale al rettangolo BACD, se la base BG non è contenuta due volte, e un terzo dalla base AB. E in generale sarà facile il vedere, che, affinchè due rettangoli ABCD, BFEG sieno eguali, bisogna, che le base BG di uno sia contenuta nella base AB dell'altro, come l'altezza BC nell'altezza BF.

E non si tratta più dunque di altro, che di dividere la linea AB in maniera, che AB sia a GB, come BF

a BC; quel, che si farà (1.Part.Artic. XLI.) tirando la linea FA, e dal punto dato C la parallela CG.

VI.

Secondo modo di trasformare un rettangolo in un'altro di data altezza. Fig. II.

Per cangiare il rettangolo ABCD in un'altro rettangolo BFEG, che abbia un'altezza data BF, si può usare un metodo meno naturale del precedente, ma più comodo. Avendo prolungato AD, fino a rincontrare in I la retta FEI, tirata pel punto F parallelamente ad AB, si tirerà la diagonale BI, e pel punto O, ove ella incontrerà il lato DC, si tirerà GOE parallela a FB, ed il rettangolo BFEG sarà uguale al rettangolo ABCD.

Per provarlo, basterà di far vedere, che levando da' rettangoli ABCD, BFEG la parte comune OCBG,

OCBG, il rettangolo ADOG ugua-
glierà il rettangolo EOCF.

Ora se uno fa attenzione all'ugua-
lità de' due triangoli IBF, IBA, ve-
drà, che sottraendo da questi trian-
goli quantità uguali, i residui saran-
no uguali. Ma il triangolo IAB di-
venterà il rettangolo ADOG, se
uno sottrae i tre triangoli IDO, OGB;
Siccome il triangolo IBF diventerà
il rettangolo EOCF, sottraendone
i triangoli IEO, OBC, eguali a' due
primieri. Dunque i due rettangoli
ADOG, EOCF residui de' due trian-
goli saranno eguali tra loro così bene,
come i rettangoli ABCD, BFEG.

VII.

Si dimostra rigorosamente, che se due rettangoli sono eguali, la base del primo è alla base del secondo, co-

Questa seconda maniera di tras-
formare un rettangolo in un'altro,
conferma il principio, che aveva la
prima supposto, e che avrà potuto

 sem-

come l'altezza del secondo all'altezza del primo.

ſembrare non eſſere appoggiato. che sù una ſemplice induzione.

Dall'egualità di due rettangoli ABCD, BFEG ſi era concluſo, che e' biſognava, che AB foſſe a BG, come BF a BC; ciò, che ſi può ora provare per l'Articolo precedente.

Perchè eſſendo evidentemente ſimili i triangoli IAB, e OGB, la baſe AB del grande ſarà alla baſe GB del piccolo, come l'altezza IA all'altezza OG, o come BF a BC a loro uguali. Dunque AB ſarà a GB, come BF a BC, conforme al principio dell'Articolo V.

VIII.

Colla maniera medeſima, colla quale ſi dimoſtra, che dall'eſſere eguali due rettangoli ABCD, BFEG, ne ſegue, che l'altezza BF è all'altezza BC, come la baſe AB alla baſe

base BG, si dimostra pure, che, quando quattro linee BF, BC, AB, BG sono tali, che la prima è alla seconda, come la terza alla quarta; il rettangolo, che ha per altezza, e per base la prima, e la quarta di queste linee, è uguale al rettangolo, che ha per altezza, e per base la seconda, e la terza.

Se di quattro linee la prima è alla seconda, come la terza alla quarta, il rettangolo formato per la prima, e per la quarta sarà uguale al formato dalla seconda, e dalla terza.

I X.

Quando quattro quantità, sono come le linee predette BF, BC, AB, BG, tali, che la prima è alla seconda, come la terza alla quarta, si dice, che queste quattro quantità sono in proporzione, o che formano una proporzione. Così 6, 9, 18, 27, sono in proporzione; perchè 6 è contenuto tante volte in 9, quante 18 in 27. Così pure 15, 25, 75, 125 &c.

Quattro quantità, delle quali la prima sia alla seconda, come la terza alla quarta, si dicono formare una proporzione.

X.

De' quattro termini di una proporzione il primo, ed il quarto sono chiamati estremi; si chiamano medi il secondo, ed il terzo.

La prima, e la quarta delle quattro quantità di una proporzione si chiamano *termini estremi*, o semplicemente *estremi*; la seconda, e la terza si chiamano *termini medi*, o semplicemente *medi*.

Servendosi delle precedenti definizioni, le proposizioni degli Articoli VII., e VIII., si proporranno così.

XI.

In una proporzione il prodotto degli estremi è uguale al prodotto de' medi.

Di quattro quantità proporzionali il prodotto degli estremi è uguale al prodotto de' medi.

XII.

Se il prodotto degli estremi è uguale al prodotto de' medi, que' quattro termini formano una proporzione.

Se quattro quantità sono tali, che il prodotto degli estremi sia uguale al prodotto de' medi, queste quattro quantità saranno proporzionali.

XIII. Si

XIII.

Si devono ben notare gli Articoli precedenti; perchè ſono di grandiſſimo uſo. Tra le altre coſe ſe ne ricava la dimoſtrazione della regola, che in Aritmetica ſi ſuol dire la *regola del tre*. Per dare un' idea di queſta regola, noi ne porgeremo un' eſempio; eſſendo queſta la maniera più ſemplice di farſi intendere.

Quindi ſi ricava la regola del tre.

Supponghiamo, che 24. lavoratori abbiano fatto trenta canne di lavoro in un determinato tempo, ſi dimanda, quanto ne faranno 64. lavoratori in un tempo eguale.

E' evidente, che per ſciogliere il queſito biſogna trovare un numero, che ſia a 64. nella ragione medeſima, che 30. è a 24.. Or ſecondo quello, che abbiamo veduto, queſto nu-

numero sarà tale, che il suo prodotto per 24. uguaglierà il prodotto di 30. per 64. Ma il prodotto di 30. per 64. è 1920. Dunque il numero cercato sarà quello, che moltiplicato per 24. darà 1920. Per poco, che uno abbia d'idea delle operazioni dell'Aritmetica, facilmente si accorgerà esser necessario, che questo numero sia il quoziente della divisione di 1920. per 24., cioè a dire 80.

Quale sia la maniera di trovare il quarto termine di una proporzione, dati i tre primi.

In generale per trovare il quarto termine di una proporzione, di cui sieno dati i tre primi, bisogna prendere il prodotto del secondo, e del terzo, e dividere questo prodotto pel primo termine della proporzione.

XIV.

Un esempio così facile, come è quel-

quello, che abbiamo scelto, non darà forse a divedere la necessità del metodo precedente. Il solo naturale accorgimento può far trovare il numero cercato. Si vede, che 30, avanza 24. di un quarto, e che così bisogna, che il numero cercato avanzi pure di un quarto il 64., e questo dà 80. Ma vi è de' casi, ne' quali più difficilmente si troverebbe la ragione, che hanno i due primi termini della proporzione.

Per esempio, si cerca un quarto proporzionale a questi tre numeri 259., 407., 483.

Per trovarlo secondo il metodo precedente, si moltiplica 483. per 407., e si divide 196581., che n'è il prodotto per 259., quello, che dà 759., per quarto termine cercato.

In

In altra maniera non ſi ſarebbe
potuto trovare queſto termine, che
a taſtone. Si ſarebbe ben potuto tro-
vare, per eſempio, che 148., ec-
ceſſo di 407. sù 259. contiene quat-
tro ſettime parti di 259., e che co-
sì era pur neceſſario di aggiungere a
483. il numero 276., che contiene
quattro delle ſue ſettime parti. Ma
la generalità, e ſicurezza del me-
todo precedente ci libera dall'im-
barazzo del provare, e riprovare
ciò, che ancora non baſta in mol-
ti caſi.

X V.

Quando ſi dovrà aggiungere due
quadrati, ſi farà la loro addizione
nella medeſima maniera, che ſi fa
quella di due rettangoli: eſſendo i
quadrati rettangoli, che hanno l'al-
tezza uguale alla baſe. Si trasfor-
merà

merà dunque uno de' quadrati il più piccolo, per esempio, in un rettangolo, che abbia il lato del grande per altezza, e li due quadrati non saranno, che un rettangolo. Si potrà pur dare l'altezza del piccolo quadrato a tutti due, ovvero un'altra altezza ad arbitrio: quello, che non si può quasi lasciar di fare, allorchè si vuole così ridurre due quadrati in una figura, è, di fare un quadrato uguale a due altri: problema, di cui si trova facilmente questa soluzione.

X V I.

FIG. III.
Fare un quadrato doppio di un altro.

Supponghiamo, che i due quadrati ABCD, CBFE, de' quali se ne vuol fare un solo quadrato, sieno uguali fra loro; è facile l'avvertire, che se uno tira le diagonali AC, e CF, i triangoli ABC, e CBF

CBF saranno insieme il valore di un quadrato. Dunque trasportando sopra AF i due altri triangoli DCA, e DEF, si farà il quadrato ACFG, di cui il lato AC sarà la diagonale del quadrato ABCD, e di cui la superficie uguaglierà quella de' due quadrati proposti: ciò, che non ha bisogno di dimostrazione.

XVII.

Fig. VI.

Fare un quadrato eguale a due altri presi insieme.

Supponghiamo ora, che si voglia fare un quadrato uguale alla somma de' due quadrati disuguali ADC*d*, CFE*f*, o quel, che è lo stesso, che uno voglia trasformare la figura ADFE*fd* in un quadrato.

Seguitando il metodo precedente, si cercherà, se è possibile, di trovare nella linea DF qualche punto H, tale che

1. Tirando le linee AH, e HE, e fa-

e facendo girare i triangoli ADH, EFH attorno i punti A, ed E, finchè avendo le posizioni A*dh*, E*fh*, questi due triangoli si congiungano in *h*.

2. Che i quattro lati AH, HE, E*h*, *h*A sieno eguali, e perpendicolari gli uni agli altri.

Or questo punto H si troverà facendo DH uguale al lato CF, ovvero EF. Perchè dall' essersi supposta eguale DH a CF, ne segue primieramente, che se uno fa girare ADH attorno al suo angolo A, dimodochè abbia la posizione A*dh*, il punto H arrivato in *h*, sarà distante dal punto C un' intervallo uguale a DF.

Da questo essersi supposti eguali DH, e CF, ne segue ancora, che HF sarà uguale a DC, e così il trian-

triangolo EFH girando attorno di E per prendere la posizione E*fh*, il punto H arriverà al medesimo punto *h* distante da C un' intervallo uguale a DF.

Dunque la figura ADFE*fd* sarà trasformata in una figura di quattro lati AHE*h*. Dunque non resta da vedere altro, se non se questi quattro lati saranno uguali, e perpendicolari gli uni agli altri.

Or l' egualità di questi quattro lati è evidente, poichè A*h*, ed *h*E, saranno le medesime, AH, e HE, e l' ugualità di questi due ultimi si ricaverà da questo, che essendo DH uguale a CF, ovvero ad FE, i due triangoli ADH, HEF saranno simili, ed eguali.

Rimane a vedere, se i lati della figura AHE*h* formano angoli retti.

E' fa-

E' facile l'assicurarsi di ciò, riflettendo, che mentre HAD girava attorno di A, per arrivare in *h*A*d*, era necessario, che il lato AH facesse il movimento medesimo, che il lato AD. Ora il lato AD fa un'angolo retto DA*d*, diventando A*d*. Dunque il lato AH farà pure un'angolo retto HA*h*, diventando A*h*.

Quanto agli altri angoli H, E, *h*, si vede evidentemente, che devono essere retti. Perchè non sarà possibile, che una figura, terminata da quattro lati uguali, abbia un'angolo retto, senza che gli altri tre facciano parimente angoli retti.

XVIII.

Se uno osserva, che li due quadrati ADC*d*, CFE*f* sono fatti l'uno sopra AD lato medio del triangolo ADH, l'altro sù EF uguale a DH,

piccolo lato del medesimo triangolo ADH, e che il quadrato AHE*b* uguale agli altri due è descritto sul lato maggiore AH, che si nomina comunemente l'ipotenusa del triangolo rettangolo, si scorgerà tosto questa famosa proprietà de' triangoli rettangoli; che il quadrato dell'*ipotenusa* è uguale alla somma de' quadrati fatti sù gli altri due lati.

L'ipotenusa d'un triangolo rettangolo è il suo lato maggiore.

E il quadrato di questo lato è uguale alla somma de' quadrati fatti sù gli altri due.

XIX.

FIG. V. e VI.

Dunque allorchè di due quadrati HDKL, ABCD se ne vorrà fare un solo, sarà inutile di metter*li* al lato uno all'altro, e di discomporli, come s'è fatto nell'Articolo XVII. Basterà di collocare i loro lati AD, DH in modo, che facciano un'angolo retto, è tirare la linea AH: poichè allora questa linea sarà il lato del quadrato cercato AHIE.

Di dove si tira una maniera semplice di ridurre due quadrati a un solo.

FIG. VII.

XX. Se

XX.

Se uno di due figure ſimili DAFGM, DHPON, ne voglia fare una terza uguale in ſuperficie a tutte due, baſta porre le baſi AD, HD di queſte figure sù i due lati di un angolo retto ADH, e l'ipotenuſa AH del triangolo ADH ſarà la baſe della figura cercata.

Fig. VIII. e IX.

Fig. X.

Se i lati di un triangolo rettangolo ſervon di baſe a tre figure ſimili, la figura fatta sù l'ipotenuſa uguaglierà le due altre inſieme.

Per vederne la ragione, ſi figurino i quadrati ABCD, DHKL, AHIE fatti ſulle baſi delle tre figure ſimili, ſi vedrà ſubito, per l'Articolo XVIII., che il quadrato AHIE varrà egli ſolo i due altri quadrati ABCD, DHKL. Ora le figure ſimili ſono tra loro, come i quadrati de' loro lati omologhi (Part. I. Artic. XLVII.): Dunque tre quadrati ABCD, DHKL, AHIE avranno le

 mede-

medesime parti delle figure DAFGM DHPON, AHQRS.

Donde sarà facile il conchiudere, che la figura AHQRS sarà uguale alle altre due. Supponghiamo, per esempio, che ciascuno di questi quadrati sia la metà della figura, dentro la quale è compreso, nessuno dubiterà, che la figura AHQRS non sia eguale alle altre due, poichè la sua metà sola è uguale alla metà delle due figure DHPON, DAFGM. Il medesimo succederebbe, se i quadrati ABCD, DHKL, AHIE fossero due terzi, tre quarti &c. delle figure DAFGM, DHPON, AHQRS.

XXI.

Ridurre più figure simili ad una sola.

Se uno vuole unire in una somma tre, quattro &c. figure simili, o quello, che è lo stesso, tre, quattro &c. quadrati, il metodo sarà sempre

pre il medesimo. Se uno volesse, per esempio, aggiungerne tre, si faccia un quadrato uguale a' due primi; e a questo nuovo quadrato si aggiungerà il terzo; e così si avrà un quadrato uguale a tre quadrati proposti.

XXII.

Da quì si ricava, che se uno vuol fare un quadrato cinque, sei &c. volte più grande di un'altro, basta, che segua il metodo precedente per risolvere questo problema, ed il problema inverso, cioè di fare un quadrato, che sia la quinta, la sesta &c. parte di un quadrato proposto: richiedendosi solo, che uno si ricordi della maniera data per trovare una quarta proporzionale a tre linee date. Nella terza Parte di quest'opera noi daremo un metodo più diretto,

e più comodo per sciogliere questa sorte di problemi.

XXIII.

L'addizione delle figure simili ci somministra una prova decisiva della necessità di abbandonare le scale, quando si voglia fare l'operazioni di una maniera, che si possa rigorosamente dimostrare.

Supponghiamo, per esempio, che si abbia a fare un quadrato doppio di un'altro. Quelli, che non sapranno il metodo dato nell'Articolo XVI., probabilmente si atterranno alla seguente maniera.

Divideranno il lato di un quadrato dato in un gran numero di parti; per esempio, in 100. Moltiplicheranno 100. per 100., e troveranno 10000. pel valore del quadra-

drato; ciò, che darà 20000. per valore di quello, che si domanda.

Ma dal valore di questo non ne ricaveranno la maniera di descriverlo. E' necessario, che abbiano il suo lato espresso per un numero; e che questo numero sia tale, che moltiplicato per se medesimo, cioè a dire, avendolo quadrato, il prodotto dia 20000.

Il prodotto, che risulta dalla moltiplicazione di un numero per se medesimo, è il quadrato di questo numero.

Or vano sarebbe il cercare questo numero, di cui ci è bisogno in una scala, le parti della quale sieno centesime del lato del quadrato dato. Perchè 141. moltiplicato per se medesimo darà 19881., e 142. darà 20164.; e però questi numeri sono lontani da quello, che si dovrebbe trovare.

Potrebbe forse uno darsi a credere, che dividendo il lato del qua-

drato dato in più di 100. parti, troverà un numero determinato di queste parti per un lato del quadrato, che sia doppio del primo. Ma qualunque prova, che egli faccia, troverà sempre di aver cercato indarno due numeri, de' quali uno esprima il lato, ovvero, per parlare col linguaggio ordinario, la radice di un quadrato doppio dell'altro.

La radice di un quadrato è il numero, che moltiplicato per se stesso dà il quadrato.

XXIV.

Un numero è multiplo di un' altro, quando lo contiene per l'appunto più volte.

Di fatti si dimostra in Aritmetica, che se due numeri non sono moltiplicati uno per l'altro; cioè, se uno non contiene l'altro un numero determinato di volte, il quadrato del più grande non sarà nè pure multiplo del quadrato del più piccolo. Così, per esempio, 5. non potendosi dividere esattamente per 4., il suo qua-

quadrato 25. non potrà nè pure dividersi per 16. quadrato di 4.

Dunque se uno farà il quadrato di due numeri, del quale uno sia più grande dell'altro, ma sia meno, che 'l doppio, avrà per questa operazione due altri numeri, de' quali uno sarà minore del quadruplo dell'altro, ma senza poterne essere nè il doppio, nè il triplo. Dunque se uno divide il lato di un quadrato in qual numero di parti vorrà, il lato del quadrato duplo, che, secondo quello, che si è dimostrato nell' Articolo XVI., sarà la diagonale di questo quadrato, non conterrà un numero divolto per l'appunto di queste parti: ciò, che nel linguaggio Geometrico, si dice; che il lato del quadrato, e la sua diagonale sono incommensurabili.

Il lato di un quadrato, e la sua diagonale sono incommensurabili.

XXV. Si

XXV.

Si può di più osservare, che vi ha una quantità di altre linee, che non hanno alcuna comune misura.

Perchè se uno scrive le due serie

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 &c.

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 &c.,

la prima delle quali esprima i numeri naturali, e l'altra i loro quadrati, si vedrà, che come li numeri, che sono tra 4., e 9., tra 9., e 16., tra 16., e 25. &c., non hanno alcuna radice, così i lati di due quadrati, de' quali l'uno sia o triplo, o quintuplo, o sestuplo &c. dell'altro, sono incommensurabili tra loro.

XXVI.

Dall'essere alcune linee incommensurabili rispetto ad altre linee, forse sospetterà qualcheduno dell'esattezza delle proposizioni, di cui ci sia-

siamo serviti a provare la proporzionalità delle figure simili. Perchè paragonando queste figure (1. Part. Art. XXXIV., e seg.) noi abbiamo sempre supposto una scala, che possa egualmente servire a misurare tutte le loro parti: supposizione, che sembrerà ora dovere essere limitata a causa di quel, che abbiamo detto. Bisogna dunque, che noi ci rifacciamo sulle nostre stesse pedate, e che esaminiamo, se le nostre proposizioni per essere vere, abbiamo bisogno di qualche modificazione.

XXVII.

Cominciamo da quel, che si è detto nell'Articolo XXXIX. della prima Parte, e vediamo, se è esattamente vero, che li triangoli, come *abc*, ABC, gli angoli de' quali sono gl'istessi, abbiano i loro lati pro-

FIG. XI. e XII.

proporzionali. Supponghiamo, per esempio, che essendo la base del primo *ab*, quella del secondo sia una retta AB uguale alla diagonale di un quadrato, del quale *ab* sia il lato, e cerchiamo, se in questa supposizione, la ragione di AC ad *ac* sarà la medesima, che quella di AB ad *ab*.

Ancorchè, secondo quello, che abbiamo veduto, per quanto grande, che possa essere il numero delle parti, che si suppongono arbitrariamente in *ab*, AB non possa contenere un numero per appunto di queste parti; contuttociò facilmente uno si accorgerà, che più questo numero sarà grande, e più AB si approssimerà ad essere esattamente misurata dalle parti di *ab*. Supponghiamo *ab* divisa in 100. parti; quello, che AB conterrà di queste parti, si trove-

troverà tra 141., e 142. (Art. XXIII.) Contentiamoci di 141., e trascuriamo il piccolo residuo. E' chiaro (1. Part. Artic. XXXIX.) che AC pure conterrà 141. di parti di *ac*.

Supponghiamo *ab* divisa in 1000. parti; quello, che AB conterrà delle parti di *ab*, sarà tra 1414., e 1415. Prendiamo 1414., e trascuriamo il residuo. Si troverà medesimamente, che AC conterrà 1414. di millesime parti di *ac*, e che in generale AC conterrà sempre altrettante parti di *ac* con un residuo, che AB conterrà di parti di *ab* con un residuo.

In oltre questi residui, come noi abbiamo osservato, saranno dall'una, e l'altra parte tanto più piccoli, quanto il numero delle parti di *ab* sarà grande. Dunque sarà permesso di trascurarla, se uno s'immagi-

na

na la divisione di *ab* portata all' infinito. Dunque si potrà dire allora, che il numero delle parti di *ac*, che contiene AC, sarà uguale al numero delle parti di *ab*, che conterrà AB, e che così AC sarà ad *ac*, come AB ad *a b*.

Dunque noi abbiamo rigorosamente dimostrato, che allora quando due triangoli hanno li medesimi angoli, hanno ancora i loro lati proporzionali, o abbiano i lati, o non abbiano una comune misura.

I triangoli, e le figure simili hanno i loro lati proporzionali, ancora quando i lati sono incommensurabili.

La proposizione (1. Part. Art. XLV.) donde si è tirata la proporzionalità delle linee, che si corrispondono nelle figure simili, si giustificherà nel modo medesimo.

XXVIII.

Col mezzo di simili ragionamenti si vedrà, che le proposizioni spiegate

gate negli Articoli XLIV., e XLVII. della prima Parte, nelle quali si è mostrato, che le aree de' triangoli, e delle figure simili hanno tra loro la proporzione medesima, che i quadrati de' lati omologhi, sono in generale sempre vere; ancora quando i lati di queste figure sono incommensurabili.

E queste figure, sono sempre tra loro, come i quadrati de' loro lati omologhi.

Prendiamo, per esempio, li triangoli simili ABC, *abc*, de' quali noi supponghiamo le altezze incommensurabili colle loro basi. In questo caso, non vi sarà alcun quadrato, per quanto sia piccolo, che possa servire di misura comune a questi triangoli, ed a' quadrati fatti sulle loro basi; cioè a dire, che le aree *abc*, ed *abde* saranno incommensurabili tra loro, così come le aree ABC, ed ABDE; ma non sarà me-

no vero, che il triangolo ABC sia al quadrato ABDE, come il triangolo *abc*, al quadrato *abde*.

Di questo uno si assicurerà osservando, che più le parti della scala, di cui uno si servirà per misurare AB, e CK, saranno supposte piccole, e più uno si avvicinerà ad avere li numeri, che esprimano il rapporto di ABC, ad ABDE. Dunque dividendo sempre la scala del triangolo *abc* nel medesimo numero di parti, e trascurando i residui, si vedrà, che i medesimi numeri serviranno sempre ad esprimere il rapporto del triangolo ABC al quadrato ABDE, e quello del triangolo *abc* al quadrato *abde*. Che se uno porta col pensiero la divisione della scala fino all'infinito, i residui diventeranno assolutamente nulli; e si

ſi potrà dire, che i numeri, i quali eſprimeranno il rapporto del triangolo *abc* al quadrato *abde*, eſprimeranno pure il rapporto del triangolo ABC al quadrato ABDE, e che così il triangolo *abc* ſarà al quadrato *abde*, come il triangolo ABC al quadrato ABDE.

Il medeſimo ſarà di tutte le figure ſimili.

ELEMENTI DI GEOMETRIA.

PARTE TERZA.

Della misura delle figure circolari, e delle loro proprietà.

Opo di essere arrivati a misurare tutte le sorti di figure rettilinee, hanno i nostri antichi voluto aver la maniera di determinare quelle, che finiscono in linee curve. Li terreni, ed in generale gli spazj, de' qua-

de' quali si cerca la misura, non sono sempre terminati per linee rette.

Spesso le figure curvilinee, e le figure miste, cioè quelle, che sono terminate da linee rette, e da linee curve si possono ridurre a figure tutte rettilinee, come di già abbiamo detto. Perchè se si abbia a misurare una figura tale, come ABCDEFG, si potrà prendere il lato AD per una unione di due, di tre &c. linee rette, sostituendo perciò la linea FD dalla curva FED, si avrà la figura rettilinea ABCDFG, la quale sì poco differisce dalla figura mista, che una senza errore sensibile potrà pigliarsi per l'altra.

Tavola VIII. Fig. I.

Si opererà dunque sù queste figure, seguendo i metodi precedenti. Ma i Geometri non rimarranno sodisfatti di questa sorte di operazioni:

ni: essi non vogliono, che operazioni rigorose. Di più vi sarà caso, nel quale la trasformazione di una figura curvilinea, o mista in una figura tutta rettilinea richiedeva, che il suo contorno si divida in un così gran numero di parti, che il metodo comune riuscirà impraticabile. Così non deve uno curarsi di seguirlo, se si debba misurare uno spazio, come Z (Fig. 7.), ovvero l'intiero circolo X (Fig. 3.). Bisognerà allora prendere un'altra strada per trovare la misura di questa sorte di spazj. Quì noi non parleremo, che di quelli, il contorno de' quali contiene solo archi di circolo.

I.

Fig. III. Supponghiamo dunque, che s'abbia a misurare l'area del circolo X. Si osserverà, che iscrivendoli un poligo-

ligono regolare BCDE &c. più lati avrà questo poligono, e più si approssimerà al circolo. Ora si è veduto, che l'area di questa figura (1. Part. Artic. XXII.) è uguale altrettante di volte al prodotto del lato BC, per la metà dell'apotema AH, quanti ha di lati il poligono, o quello, che è l'istesso, che quest'area ha per misura il prodotto del contorno intiero BCDE &c. per la metà dell'apotema. Dunque, poichè andando fino all'infinito, il numero de' lati del poligono, la sua area, il suo contorno, il suo apotema uguaglieranno l'area, il contorno, il raggio del circolo, la misura del circolo sarà il prodotto della sua circonferenza per la metà del suo raggio.

La misura del circolo è il prodotto della sua circonferenza per la metà del suo raggio.

II.

Da questo ne segue, che la superficie di un circolo BCD è uguale a

Fig. IV.

L'area del circolo è uguale a un triangolo, del quale l'altezza è uguale al raggio, e la base una retta eguale alla circonferenza

quella di un triangolo ABL, del quale l'altezza ſia il raggio AB, e la base una retta BL, eguale alla circonferenza.

III.

E non ſi tratta dunque, che di avere il raggio, e la circonferenza. In quanto al raggio è facile di miſurarlo: non così della circonferenza. Contuttociò per averne la miſura, ſi può mettere attorno al circolo un filo, ciò, che in molte occaſioni baſta per la pratica.

Ma fin ad ora non ſi è potuto arrivare a miſurare geometricamente la circonferenza del circolo, cioè a dire, a miſurare eſattamente la ragione, che eſſa ha al raggio. Si trova queſta ragione alle centomilleſime, ed alle millioneſime, e per approſſi-

prossimazione quanto uno vuole, senza che si possa però determinarla rigorosamente.

IV.

L'approssimazione più semplice, che si sia trovata, è quella di Archimede. Diviso il diametro in sette punti, quello, che la circonferenza contiene di queste parti, è tra le 21., e le 22.: e si sa, che è più vicino alle 22., che alle 21.

Se il diametro del circolo si divida in 7. parti, la circonferenza ne ha presso a 22. di queste parti.

V.

Del resto egli è chiaro, che se si sapesse esattamente la ragione di una sola circonferenza al suo raggio, si saprebbe quella di tutte le altre circonferenze a' loro raggi; dovendo questa ragione essere la medesima in tutti i circoli: proposizione, la quale apparisce sì chiara, che non ha bisogno di essere dimostrata; poichè si

Le circonferenze de' circoli sono trà loro, come i loro raggi.

vede, che tutte quelle operazioni, le quali uno avrà fatte per misurare una circonferenza, servendosi delle parti del suo raggio, dovrà replicare per misurare ogni altra circonferenza; e che così si troverà il medesimo numero di parti del suo raggio.

V I.

Le aree de' circoli sono proporzionali a'quadrati de' loro raggi.

Egli è evidente, che i circoli hanno la proprietà generale di tutte le figure simili (1. Part. Artic. XLVII.) voglio dire, che le loro superficie sono nella medesima proporzione, che i quadrati de'loro lati omologhi: ma siccome per applicare questa proposizione a'circoli, non si potrà prendere i loro lati, bisognerà servirsi de' raggi; e si vedrà, che i circoli avranno le loro aree proporzionali a' quadrati de' loro raggi.

Se non comparisse subito, che questa

sta proposizione deve seguire dal detto nell'Articolo XLVII. della prima Parte, e si volesse una dimostrazione particolare, si farà attenzione, che tornerà assolutamente al medesimo di comparare le aree de' due circoli BCD, EFG, ovvero quelle de' triangoli ABL, AEM, che saranno loro eguali (Artic. II.) supponendo, che le loro basi BL, e EM, sieno le circonferenze BCD, EFG svoltolate, e che le loro altezze sieno i raggi AB, ed AE. Ora per l'articolo precedente questi triangoli saranno simili: dunque le loro aree saranno nella medesima proporzione, che li quadrati de' loro lati omologhi AB, AE, raggi de' circoli BCD, ed EFG. Dunque &c.

FIG. IV. e V.

VII.

I circoli a cagione della loro similitu-

litudine, nella medesima maniera; che le figure simili, avranno questa proprietà, che se prendendo i tre lati di un triangolo rettangolo per raggi, si descriveranno tre circoli, quello, del quale il raggio sarà l'ipotenusa, uguaglierà i due altri presi insieme.

Di tre circoli, che abbiano per raggio i lati di un triangolo rettangolo, quello, che dà l'ipotenusa, è uguale agli altri due insieme.

Così si potrà sempre trovare un circolo uguale a due circoli dati, e questo senza la fatica di misurare ciascuno di questi circoli. Se uno vuole, per esempio, fare una vasca, la quale contenga tanto di acqua, che due altre, avendo la medesima profondità, se si voglia trovare l'apertura di un condotto di fontana, per il quale scorra tant'acqua, quanta per due altri dati, si otterrà subito facilmente col mezzo dato.

VIII. Se

VIII.

Se ſi abbia a miſurare la ſuperficie di una corona V, figura compreſa tra due circoli concentrici EFG, BCD, cioè tra due circoli, che hanno un centro comune, quello, che ſubito ſi preſenterà, ſarà di miſurare ſeparatamente la ſuperficie di due circoli, e di ſottrarre la più piccola dalla più grande. Ma egli è facile l'accorgerſi, che il problema ſi può riſolvere di una maniera più comoda per la pratica.

FIG. VI. Una corona è lo ſpazio compreſo tra due circoli concentrici.

Immaginiamoci un triangolo ABL, che ha il raggio AB per altezza, e di cui la baſe ſia una retta BL uguale alla circonferenza BCD. Se uno tira pel punto E la retta EM parallela a BL, queſta retta ſarà uguale alla circonferenza EFG. Perchè a cagione della ſimilitudine de' triangoli

goli AEM, ABL, vi avrà la medesima proporzione tra AB, e BL, che tra AE, ed EM. Ora per l'ipotesi BL sarà uguale alla circonferenza, di cui AB è il raggio. Dunque EM uguaglierà la circonferenza, che avrà per raggio la linea AE parte di AB. Il medesimo avverrà di ogni altra linea KI parallela a BL. Sarà sempre eguale alla circonferenza, della quale il raggio sia AK.

Dall'ugualità supposta tra la circonferenza EFG, e la' retta EM ne segue necessariamente l'egualità del triangolo AEM al circolo EFG. Dunque necessariamente lo spazio rettilineo EBLM sarà uguale all'anello proposto V. A questo spazio EBLM si può facilmente cangiare in un rettangolo EBPH, dividendo ML in due parti uguali MI, e IL, e tirando

do a BL pel punto I la perpendicolare HIP, che darà il triangolo aggiunto MHI uguale al triangolo sottratto PLI.

Dunque se pel punto I si tira a BL, la parallela IK, che dividerà EB in due parti uguali, l'anello proposto eguale allo spazio EBLM, ovvero a EBPH avrà per misura il prodotto EB per KI, circonferenza, di cui AK sarà il raggio.

Dunque per misurare l'anello V, bisogna moltiplicare la sua larghezza EB per la circonferenza KOQ detta media tra le circonferenze BCD, EFG, perchè ella sorpassa la piccola circonferenza EFG, ovvero la retta EM d'una quantità MH uguale a PL, quantità, di cui è ella superata dalla maggior circonferenza BCD, ovvero dalla retta BL.

Per misurare un'anello, si deve moltiplicare la larghezza per la circonferenza media.

IX. Se

I X.

Se ſi tratterà di miſurare una figura Y compoſta di archi di circoli differenti, e di linee rette, ovvero una figura Z unicamente compoſta di archi di circolo, tutta la difficoltà ſi ridurrà a miſurare i ſegmenti del circolo, cioè ſpazj, come ABCE terminati da un'arco ABC, e dalla corda AC. Perchè le figure intieramente compoſte d'archi di circolo, ovvero d'archi, e di linee rette, poſſono tutte eſſer conſiderate, come figure rettilinee accreſciute, o diminuite da alcuni ſegmenti.

FIG. II. FIG. VII. Il ſegmento di circolo è uno ſpazio terminato dall'arco, e dalla corda. FIG. VIII.

La miſura di tutte le figure circolari ſi riduce a quella del ſegmento.

X.

La miſura di un ſegmento qualunque ABCE è facile a trovare, allorchè ſi ſa quella del circolo. Perchè tirando le linee AT, CT al centro T dell'arco, ſi formerà una figu-

Fig VIII

figura ABCT chiamata settore, di cui l'area sarà al circolo, come l'arco ABC all' intiera circonferenza, e che per conseguenza avrà per misura il prodotto della metà del raggio AT per l'arco ABC. Restando determinato il settore, non si dovrà fare altro, che sottrarre il triangolo ACT per avere il segmento ABCE.

Il settore è una porzione di circolo terminata da due raggi, e dall'arco, che quelli comprendono. Sua misura è quella del segmento.

X I.

Siccome spesso accade, che dovendo misurare una figura, come Y, non si ha il centro dell' arco HIK, e che senza questo centro non sapesse uno misurar la figura, poichè il metodo precedente esigge di conoscere il raggio, e' bisogna, che noi cerchiamo il centro di un' arco di circolo qualunque.

FIG. I.

Sia ABC l'arco del circolo proposto; se uno prende ad arbitrio due pun-

Trovare il centro di un arco di circolo qualnnque.

Fig. 15. punti A, e B sù quest'arco, e da questi punti, come centri, descrive i quattro archi *goi*, *fob*, *lpk*, *mpn*, i due primi da un raggio qualunque, e li due altri o dal medesimo raggio, o da tal'altro, che li piacerà; è chiaro, che il centro cercato dell'arco ABC sarà sulla linea *op*, che congiunge i punti d'intersezione *o*, *p*.

Sciegliendo di più un terzo punto C sull'arco ABC, e servendosi di B, e di C della medesima maniera, di cui uno si è servito di A, e di B, si avrà una retta *qr*, sulla quale dovrà ancora trovarsi il centro domandato. Dunque questo centro sarà il punto T, dove s'incontrano le linee *op*, *qr*.

XII.

Così in qualunque sito uno ponga tre punti, purchè non li metta in una

una linea retta; si potranno sempre congiungere con un'arco di circolo; o quello, che è l'istesso, qualunque sia la ragione de' lati AC, BC, di un triangolo ACB colla sua base, si potrà sempre circoscrivere un circolo a questo triangolo.

FIG. X.

XIII.

Il metodo dato per circoscrivere un circolo a un triangolo applicato successivamente a diversi triangoli ACB, AEB, AHB, più, o meno alti rispetto alla loro base AB, mostrerà, che passando da un triangolo ACB, il quale ha l'angolo al vertice molto acuto, ad altri triangoli AEB, AGB, che hanno l'angolo al vertice più aperto; il centro del circolo circoscritto continuamente si approssimerà ad AB, e che questo centro passa in appresso sotto ad AB,

FIG. XI.

allorchè l'angolo al vertice AGB ha una certa apertura. Or vedendo passar questo centro al disotto di AB, dopo averlo veduto di sopra, deve, come io credo, venir voglia di cercare, di quale specie è il triangolo AFB, quando il circolo circoscritto ha il suo centro sulla stessa AB.

FIG. XII.

Per conoscere questo triangolo AFB, si comincierà dal notare, che in questo caso particolare, la porzione del circolo circoscritto al triangolo deve essere un semicircolo per l'appunto. E di fatti trovandosi il centro del detto circolo sulla base AB, le estremità della quale sono, secondo l'ipotesi, nella circonferenza, il centro M dovrà essere precisamente situato a mezzo di AB, in maniera, che AB sarà necessariamente un diametro.

Si

Si vedrà ancora, che da qualunque punto F del ſemicircolo uno tirerà le linee FA, FB, l'angolo AFB ſarà retto. Perchè tirando FM, i due triangoli AFM, MFB ſaranno iſoſceli: dunque li due angoli AFM, MFB ſaranno reſpettivamente uguali agli angoli FAM, FBM, o quello, che torna allo ſteſſo, l'angolo totale AFB uguaglierà la ſomma de' due angoli FAM, FBM: ma li tre angoli AFB, FAM, FBM preſi inſieme ſono uguali a due retti: dunque l'angolo AFB ſarà retto.

Se da un punto qualunque della circonferenza di un ſemicircolo ſi tireranno due rette alla eſtremità del diametro, ſi avrà un angolo retto.

Così ſe uno deſcrive ſulla baſe AB un triangolo rettangolo qualunque, queſto triangolo avrà la proprietà richieſta di eſſere iſcritto in un circolo, il centro del quale è ſulla baſe.

X I V.

Questa proprietà del circolo, che l'angolo, che ha il vertice nella sua semicirconferenza, e la base sul diametro, sia sempre un retto, porta a cercare, se le altre parti del circolo abbiano qualche proprietà analoga; se, per esempio, gli angoli ACB, AEB, AFB, presi in un segmento ACEFG, saranno uguali tra loro, come lo sono quelli del semicircolo.

Tavol. IX. Fig. I.

Per assicurarcene, noi comincieremo dal ricevere il valore di uno di questi angoli; e vedremo pure degli altri, se hanno il medesimo valore. Prendiamo, per esempio, l'angolo AEB, la di cui sommità E è posta a mezzo l'arco AEB. Siccome la linea EDG, che passa pel centro D, divide quest'angolo in due parti uguali, basterà di misurare l'an-

Fig. II.

l'angolo AEG ſua metà, o quello, che è lo ſpazio, baſterà ſapere, che parte è l'angolo AEG di un'angolo già miſurato, come ADG. Io dico, che l'angolo ADG è già miſurato; perchè noi ſappiamo, che l'arco AG è la miſura (1. Part. Artic. LII.).

Se uno oſſerva, che il triangolo AED è iſoſcele, vedrà facilmente, che l'angolo AEG è la metà dell'angolo ADG. Perchè gli angoli AED, EAD (1. Part. Artic. XXXI.) ſono uguali. Ma (1. Part. Art. LXVIII.) queſti due angoli preſi inſieme ſono uguali all'angolo eſterno ADG. Dunque l'angolo AED, ovvero AEG è la metà dell'angolo ADG.

Per la medeſima ragione l'angolo DEB ſarà la metà dell'angolo GDB. Dunque l'angolo totale AEB

sarà uguale alla metà dell' angolo ADB. Dunque la sua misura sarà la metà dell' arco AGB.

X V.

Misurato l' angolo AEB, per sapere, se è uguale a ciascuno degli altri angoli, che hanno il loro vertice, o sommità nel medesimo segmento, bisogna esaminare, se uno di questi angoli preso ad arbitrio, per esempio AFB, è egli pure la metà dell' angolo al centro ADB: Uno se ne assicurerà facilmente, tirando la retta FDG pel centro. Perchè allora si vedrà, che l' angolo AFB sarà composto di due altri AFD, DFB, che saranno per l' articolo precedente metà degli angoli ADG, GDB: donde si concluderà, che l' angolo totale AFB, sarà la metà dell' angolo ADB. Ed applicando

FIG. III.

Tutti gli angoli, che hanno il vertice alla circonferenza, e che sono fondati sul medesimo arco, sono eguali, ed hanno per comun misura la metà dell' arco, sul quale sono piantati;

cando questo discorso a tutti gli angoli ACB, AEB, AFB, i quali hanno il loro vertice alla circonferenza, e che posano sul medesimo arco AGB, si potrà concludere, che questi angoli sono tra loro uguali, come l'abbiamo congetturato nell' articolo precedente.

FIG. I.

X V I.

Tra li diversi angoli, i quali hanno la loro sommità nell'arco ACEFB, ve ne ha di quelli, i quali potrebbero comparire non compresi nella dimostrazione precedente. Questi sono angoli, come AFB, cioè tali, che la retta FDG tirata pel centro passa fuori dell' angolo ADB. Contuttociò notando sempre, che l' angolo DFA è la metà dell' angolo GDA, e l' angolo DFB, la metà dell' angolo GDB, si vedrà, che

FIG. IV.

l'angolo AFB, quello, per cui l'angolo DFB eccede l'angolo DFA, sarà in questo caso la metà dell'angolo A D B, eccesso dell' angolo GDB sopra a GDA.

X V I I.

Secondo le figure, delle quali ci siamo fin'ora serviti, sembrerà, che la dimostrazione precedente non convenga, che a i segmenti più grandi di un semicircolo; ma è facile il vedere, che un'angolo qualunque, come AFB, che avrà il suo vertice in un segmento più piccolo di un semicircolo, sarà sempre composto di due altri DFB, DFA, metà degli angoli BDG, ADG, e per conseguenza, che quest'angolo AFB avrà per misura la metà de' due archi BG, AG, cioè a dire la metà dell'arco AGB.

FIG. V.

XVIII.

XVIII.

Dopo di aver veduto, che in un medesimo segmento gli angoli AEB, AFB, AHB, che abbiamo supposto essere alla circonferenza, sono tutti eguali, si è tentato di trovare, che ne sia dell'angolo AQB, allorchè la sua sommità si confonde col punto B, estremità della base AB; svanisce egli allora quest'angolo? Ma non pare possibile, che venga tutto di un colpo ad annientarsi, senza ristringersi grado per grado: e non si vede, quale sarà il punto, di là dal quale quest'angolo lascierà di esistere: come dunque arriveremo noi a trovarne la misura? Questa è una difficoltà, che non si può risolvere, senza ricorrere alla Geometria dell' infinito, del quale tutti gli uomini hanno almeno una idea imperfetta,

FIG. VI.

la

la quale vogliamo quì un poco ſchiarire.

Noi oſſerviamo, che quando il punto E ſi avvicina a B diventando F, H, Q &c., la retta EB perpetuamente ſi accorcia, e l'angolo EBA, che ella fa colla retta AB, ſempre più ſi apre. Ma per quanto ſi è accorciata la linea QB, l'angolo QBA ſarà ſempre un'angolo; poichè per renderlo ſenſibile non biſognerà altro, che prolungare quella linea accorciata QB verſo R. Ed avverrà egli il medeſimo, allorchè la linea QB, a forza di ſempre diminuirſi, è arrivata in fine allo zero? quale allora è diventata la ſua poſizione? quale è divenuto il ſuo prolungamento.

Egli è evidente, che non è allora altro, che la retta BS, che tocca il circo-

circolo in un ſol punto B, ſenza rincontrarlo in neſſun'altro luogo; e che per queſta ragione ſi chiama tangente.

La tangente al circolo è la linea, che non lo tocca, che in un punto.

Di più è chiaro, che mentre che la linea EB, viene continuamente a ſcemare fino ad annientarſi; la retta AE, che diventa ſucceſſivamente AF, AH, AQ &c., ſi avvicina ſempre ad AB, e finalmente ſi confonde con lei. Dunque l'angolo alla circonferenza AEB, dopo eſſer diventato AFB, AHB, AQB, diventa in ultimo luogo l'angolo ABS fatto dalla corda AB, e dalla tangente BS, e queſt'angolo, che ſi chiama angolo al ſegmento, deve ſempre conſervare la proprietà di aver per miſura la metà dell'arco AGB.

L'angolo al ſegmento è quello, che è fatto dalla corda, e dalla tangente.

La ſua miſura è la metà dell'arco del ſegmento.

Benchè queſta dimoſtrazione ſia forſe un poco troppo aſtratta per gli prin-

principianti, contuttociò non ho creduto, se non bene il recarla, perchè sarà utilissimo a quelli, i quali vogliono inoltrarsi co' loro studj fino alla Geometria dell' infinito, l' avvezzarsi di buon' ora a simili considerazioni.

Che se questi trovano essere una tale dimostrazione sopra alle loro forze, è forza di metterli a portata d' intenderne un' altra, spiegando loro la principale proprietà delle tangenti.

X I X.

FIG. VII.

La tangente è perpendicolare al diametro, che passa pel punto, in cui lo tocca.

Questa proprietà è, che una tangente al circolo in qualunque punto B, deve essere perpendicolare al diametro I D B, che passa per questo punto. Perchè come la curvità del circolo è sì uniforme, che un diametro qualunque IDB, lo divide in due

due ſemicircoli IAB, IOB uguali, ed ugualmente ſituati in riguardo a queſto diametro, biſogna, che le due parti BS, BH della tangente comune a queſti due ſemicircoli ſiano pur così egualmente ſituati a riſguardo di queſto diametro: or queſto non potrebbe avvenire, ſe IDB non foſſe perpendicolare alla tangente HBS.

X X.

Di quì ſi vedrà facilmente, perchè l'angolo al ſegmento ABS ha per miſura la metà dell'arco AGB.

Perchè l'angolo ADB inſieme cogli altri due angoli uguali DAB, DBA fa (1. Part. Artic. LXIV.) due retti. Dunque la metà dell'angolo ADB inſieme coll'angolo DBA fa un retto. Ma l'angolo DBA inſieme coll'angolo ABS dà pure un retto. Dunque l'angolo ABS è uguale

le alla metà dell' angolo ADB, dunque la misura di ABS sarà la metà dell' arco AGB.

X X I.

La seconda dimostrazione, che abbiamo dato di questa proprietà del circolo, che l' angolo ABS ha per misura la metà dell' arco AGB, ci somministra la soluzione del seguente problema.

Fig. VIII. e IX.

Cosa sia un segmento capace di un angolo dato.

Descrivere sopra AB un segmento di circolo capace dell' angolo dato L; cioè a dire, un segmento AFB, nel quale tutti gli angoli AFB alla circonferenza sono eguali all' angolo L.

Maniera di fare un segmento capace di un angolo dato.

Per sciogliere questo problema, bisogna fare in A, e in B gli angoli BAS, ed ABS, ciascuno uguali all' angolo L, ed alzare sopra AS, e sopra BS le due perpendicolari AD,

AD, e BD, il punto D, dove queste s'incontreranno, sarà il centro dell'arco cercato AFB.

Imperocchè per l'articolo XIX. le rette BS, ed AS saranno le tangenti del circolo, il centro del quale è D, ed il raggio AD, ovvero BD, poichè BD, ovvero AD sono perpendicolari a BS, ed a AS. Di più per l'articolo precedente l'angolo ABS ha per misura la metà di AGB, e per l'Articolo XV. gli angoli, che sono, come AFB, sono pure misurati dalla metà di AGB. Dunque questi angoli AFB saranno eguali ad ABS, cioè all'angolo L, come si domandava.

XXII.

La scoperta delle proprietà del segmento del circolo, che noi abbiamo spiegata, è verisimilmente dovuta

ta

ta alla ſemplice curioſità de' Geometri. Ma è ſtato di queſta ſcoperta quello, che tutto il giorno avviene di molte altre; e quello, che non ſi crede ſubito utile, lo diviene nel tempo ſuſſeguente. Si è fatto nella pratica delle applicazioni aſſai felici delle proprietà del circolo, che noi abbiamo dimoſtrato. Io ne darò quì una ſola di queſte applicazioni; la quale ſi troverà nella ſoluzione del problema ſeguente, ed è ſpeſſo neceſſaria nella Geografia.

FIG. X.

Trovar la diſtanza di un luogo riſpetto a tre altri, de' quali ſono conoſciute le poſizioni.

A, B, C ſono tre luoghi, de' quali ſi conoſcono le diſtanze reſpettive AB, BC, AC; e ſi tratta di ſapere, a qual diſtanza da queſti luoghi è un punto D, donde ſi poſſono vedere tutti e tre, ma non ſi può di lì ſortire, per fare ſul terreno le operazioni.

Si

Si comincierà dal ſegnare ſulla carta tre punti *a*, *b*, *c*, i quali ſieno tra loro ſituati nella maniera medeſima, che i tre punti A, B, C, o per parlare, come parlano i Geometri, ſi farà il triangolo *abc* ſimile al triangolo ABC.

Fig. X., e XI.

Avendo di più oſſervato col ſemicircolo la grandezza degli angoli ADB, BDC, ſi farà ſopra *ab* il ſegmento del circolo *bda* capace dell'angolo ADB, e ſulla retta *bc* il ſegmento del circolo *bdc* capace dell'angolo BDC: il punto *d*, dove ſi incontreranno queſti ſegmenti, ſegnerà ſulla carta la poſizione del luogo D; cioè le linee *da*, *db*, *dc* ſaranno nell' iſteſſa proporzione riſpetto ad *ab*, *bc*, *ac*, che le diſtanze cercate DA, DB, DC, riſpetto alle diſtanze date AB, BC, AC; ciò, che non ha

bisogno di dimostrazione, dopo quello, che abbiamo veduto delle figure simili.

XXIII.

Si potrebbe far vedere facilmente, che la pratica ha tirato altri soccorsi dalle proprietà del circolo, che abbiamo dimostrate. Ma sarà meglio di passare ad altre proprietà del circolo, che sono state dedotte dalle precedenti, e che hanno esse pure la loro utilità.

Per proceder con ordine nel discoprire queste proprietà, noi comincieremo dall'osservare, che due angoli qualunque EDC, EBC, che sono fondati sul medesimo arco EC, essendo eguali, ne segue, che gli triangoli DAE, BAC abbiano gli angoli eguali, cioè (1. Part. Art. XXXIX.) che questi triangoli sieno simili.

TAVOLA X. FIG. I.

Perchè

Perchè per la ragion medesima, che l'angolo EDC è uguale all'angolo EBC, l'angolo DEB sarà uguale all'angolo DCB; e quanto agli angoli DAE, BAC e' sono manifestamente eguali, o sia perchè sono fatti dalle linee medesime, o sia perchè due triangoli, de' quali uno ha due angoli rispettivamente eguali a due angoli dell' altro triangolo, hanno necessariamente il terzo angolo eguale (I. Part. Art. XXXVIII.)

Per conoscere più facilmente in decorso ne' triangoli ADE, ABC le proprietà generali de' triangoli simili, noi sopraponemo il triangolo DAE al triangolo BAC, ponendo AD sopra AB, ed AE sopra AC, affinchè DE sia parallela a BC. Ci ricorderemo allora, FIG. I., e II.

1. Che se due triangoli ADE,

ABC sono simili in quattro lati AC, AE, AB, AD, sono in proporzione (1. Part. Art. XXXIX.)

2. Che in ogni proporzione il prodotto degli estremi è uguale al prodotto de' medi (2. Part. Art. VIII.) e di là conchiuderemo, che il rettangolo, ovvero il prodotto di AC per AD è uguale al rettangolo di AE per AB, proprietà del circolo molto notabile, e che si può proporre così. Se in un circolo si tira ad arbitrio due rette, che si seghino, il prodotto delle due parti della prima è uguale al prodotto delle due parti dell'altra.

Se due corde si seghino in un circolo, il rettangolo fatto dalle parti dell' una è uguale al rettangolo fatto dalle parti dell'altra.

XXIV.

Fig. III.

Se le due rette BE, DC si segano perpendicolarmente, e l'una di queste due rette è un diametro DC, è chiaro, che le due parti AB, AE dell' altra retta BE saranno eguali tra loro;

ro; di sorte che la proprietà precedente si proporrà così in questo caso particolare. Se sul diametro DC di un circolo si alza una perpendicolare qualunque AB, il quadrato di questa perpendicolare sarà uguale al rettangolo di AD per AC.

Il quadrato di una perpendicolare qualunque al diametro di un circolo è uguale al rettangolo delle due parti del diametro.

XXV.

Spesso avviene, che si ha bisogno di trasformare un rettangolo in un quadrato. L'Articolo precedente ci suggerisce un mezzo facile. Sia ACFE il rettangolo proposto, si prolungherà AC in D in maniera, che AD sia uguale ad AE, e si descriverà il semicircolo DBC, che abbia per il diametro DC; prolungando insieme il lato EA, finoche rincontra il semicircolo, si avrà AB lato del quadrato cercato ABGH uguale al rettangolo dato AFCE.

Trasformare un rettangolo in un quadrato.
Fig. IV.

 XXVI.

X X V I.

Spesso si propone un problema, il quale non è altro, che il risoluto pur ora, ma altrimenti proposto. Questo è di trovare una linea, che sia media proporzionale tra due linee date. S'intende per media proporzionale una linea, la quale tanto è grande per rapporto alla più piccola delle due linee date, quanto è piccola per rapporto alla più grande: cioè a dire, che se per esempio AB è media proporzionale tra AD, ed AC, si potrà dire, che AD è ad AB, come AB ad AC. Ov'è ben facile di vedere, che questo problema è l'istesso, che 'l precedente: poichè (II. Part. Art. VIII.) il prodotto di AD, per AC, o vogliam dire, il rettangolo di queste due linee sarà uguale al prodotto di AB per AB, cioè al quadrato di AB.

Cosa sia una media proporzionale tra due linee rette.

Dun-

Dunque allorchè ſi vorrà trovare una media proporzionale trà due linee date, ſi traſformerà il rettangolo di queſte due linee in un quadrato, il lato del quale ſarà la linea cercata.

Maniera di trovarla.

XXVII.

Si può ancora trovare una media proporzionale tra due linee in un'altra maniera, la quale diſcende dalla proprietà del circolo ſpiegata nell' Articolo XIII. Supponghiamo, che AC ſia la più grande delle due linee date, & AD la più piccola, e ſi alzi DB perpendicolare ſopra AC, dal punto B, ove ella incontrerà il ſemicircolo ABC, tirando ſul diametro AC la linea AB, ſarà queſta media proporzionale tra AD, ed AC. Perchè tirando BC, è chiaro, che 'l triangolo ABC ſarà rettangolo in B.

Un altra maniera.

FIG. V.

Dunque (I. Part. Art. XXXVIII.) questo triangolo sarà simile al triangolo ABD; poichè questi due triangoli hanno l'angolo A comune. Ma se i triangoli ADB, ed ABC sono simili, hanno i loro lati proporzionali. Dunque AD è ad AB, come AB ad AC. Dunque AB è media proporzionale tra AD, ed AC.

XXVIII.

Trasformare una figura rettilinea in un quadrato.

Se uno vuole trasformare una figura rettilinea qualunque in un quadrato, per ridurre questo problema all' Articolo XXV., basta fare di questa figura un rettangolo: ciò, che sarà facile, perchè le figure rettilinee non sono, che un'ammasso di triangoli; e ciascun triangolo è la metà di un rettangolo, che ha la base, e la medesima altezza; e tutti i rettangoli provenienti da' triangoli non

non faranno, che un sol rettangolo; dando a tutti loro un altezza comune (II. Part. Art. VI.)

XXIX.

Le figure, il contorno delle quali sono archi di circolo, potranno nella maniera medesima essere trasformati in quadrati; dopo che si sarà misurato praticamente la lunghezza degli archi, da cui sono composte. Perchè si potrà allora trasformare queste figure, come le rettilinee, in rettangoli. Per questo si ricorrerà agli Articoli IX., e X., dove abbiano insegnato a misurare tutte le sorti di figure circolari.

XXX.

Fare un quadrato, che sia ad un altro in ragion data.

Dalla proprietà del circolo spiegata nell'Articolo XXIV. si ricava ancora un metodo facilissimo per fare un quadrato, il quale sia a un quadrato

drato dato in ragion data: problema, che noi abbiamo promesso nell' Articolo XXII. della Seconda Parte.

FIG. VI.

Supponghiamo, per esempio, che uno voglia fare un quadrato, che sia al quadrato ABCD, come la linea M alla linea N. Si dividerà (I. Part. Art. XLI.) il lato CB al punto E in maniera, che CB sia a BE, come la linea N alla linea M. Tirando EF parallela ad AB, il rettangolo ABEF avrà la superficie medesima, che il quadrato richiesto. Dunque non rimane, che di trasformare questo rettangolo niun quadrato.

XXXI.

FIG. VII., e VIII.

Fare un poligono, che sia ad un poligono simile in data ragione.

Se uno vuol fare un poligono HIKLM, che sia ad un poligono simile ABCDE, in ragione della linea X alla linea Y, si comincierà dal fare sul lato AB del poligono dato ABCDE

ABCDE il quadrato ABGF. Si ricercherà ancora un' altro quadrato HIOQ, che ſia al quadrato ABGF, come la linea X alla linea Y. Ed allora deſcrivendo ſul lato HI di queſto quadrato un poligono HIKLM, ſimile al primo ABCDE, queſto nuovo poligono ſarà quello, che ſi domanda. La ragione è facile a vedere, ſe uno ſi ricorda (I. Part. Art. XLVIII.) che le figure ſimili ſono tra loro, come i quadrati de' loro lati omologhi.

XXXII.

Se uno voleſſe fare un circolo, l'area del quale foſſe quella di un circolo dato, come X al Y, biſogna coſtruire un quadrato, che ſia al quadrato del raggio di queſto primo circolo, come X al Y; ed il lato di queſto quadrato ſarà il raggio del circolo richieſto.

Fare un circolo, che ſia a un altro circolo in ragion data.

XXXIII.

XXXIII.

Ecco un'altra proprietà del circolo dedotta da quella, che ha dato argomento del problema antecedente.

FIG. IX.

Se da un punto preso fuori d'un circolo si tirino due linee, che lo dividano, i rettangoli di queste due rette per le loro parti esteriori sono uguali.

Se da un punto A preso fuori d'un circolo si menano ad arbitrio due rette ABC, ADE, che seghino ciascuna la circonferenza in due punti, ed insieme si tirano le rette CD, BE, i triangoli ACD, AEB saranno simili. Perchè l'angolo A è comune a' due triangoli, ed hanno gli angoli alla circonferenza C, ed E uguali. Se da questo, che i triangoli CAD, EAB sono simili, segue, che le quattro linee AB, AD, AE, AC sono in proporzione, e conseguentemente, che il rettangolo di due rette AB, AC, è uguale al rettangolo delle due rette AD, AE; quel, che si può esporre così. Se da

nu

un punto qualunque A preso fuori del circolo, si tirano ad arbitrio due rette AC, AE, che attraversano questo circolo; il rettangolo della retta AC per la sua parte esteriore AB., sarà uguale al rettangolo della retta AE per la sua parte pure esteriore AD.

XXXIV.

Quando la retta, che parte dal punto A, in luogo di segare il circolo, non fa, che toccarlo, come AF; la proprietà precedente si cangia in questa quì: il quadrato di una tangente AF, è uguale al rettangolo prodotto dalla segante qualunque AE, e dalla sua parte esteriore AD. Ciò, ch'è facile a dimostrare. Perchè riguardando la retta AF, che tocca il circolo, come una linea, che lo divida in due punti infinitamente

Il quadrato della tangente è uguale al rettangolo della segante per la sua parte esteriore.

mente vicini, le linee AB, AC non ſono allora, che una ſteſſa linea AF, ed in luogo del rettangolo di AB, per AC, ſi ha il quadrato di AF.

XXXV.

La propoſizione dimoſtrata nell' Articolo precedente dandoci il valore del quadrato della tangente AF, ci inſegna pure a tirare queſta tangente dal punto dato A. Per tirarla, ſi ricorderà (Art. XIX.) che il raggio FG è perpendicolare alla tangente FA. E così non biſogna altro, che trovare ſul circolo dato il punto F, tale, che l'angolo AFG ſia retto. Dunque deſcrivendo ſopra AG un ſemicircolo, il punto, ove dividerà il circolo FKO, ſarà (Artic. XIII.) il punto cercato F.

Fig. X.

Da un punto dato fuori di un circolo tirare la tangente a quello ſteſſo circolo.

ELE-

ELEMENTI DI GEOMETRIA.

PARTE QUARTA.

Della maniera di misurare i solidi, e le loro superficie.

I Principj, che noi abbiamo stabilito nelle tre prime parti di questa opera, sarebbero sufficienti a potere con essi sciogliere problemi molto più difficili di quelli, che noi

noi ſiamo per proporre: ma è più conforme al metodo ſin'ora tenuto di paſſare ora alla miſura de' *ſolidi*; cioè a dire delle eſtenſioni finite, le quali hanno ſempre tre dimenſioni, lunghezza, larghezza, e profondità.

Queſta ricerca è ſtata ſenza dubbio uno de' primi objetti, che abbiano potuto fiſſare l'attenzione de' Geometri. Per eſempio; avrà uno voluto ſapere, quante pietre riquadrate vi erano in un muro, di cui l'altezza AD, la larghezza AB, e la profondità, ovvero groſſezza BG, erano conoſciute. Sarà ſtato propoſto di determinare la quantità dell' acqua, che conteneva una foſſa, ovvero una conſerva ABCD; ſi sarà voluto trovare la ſolidità di una torre, di un'obeliſco, di una caſa, d'un campanile &c.

TAVOLA XI. FIG. I.

FIG. II.

Per

Per trattar le figure, che hanno tre dimensioni nella maniera medesima, che abbiamo trattato di quelle, che ne hanno due, noi cominceremo dall'esaminare i solidi terminati da' piani.

Non occorre quì parlare della maniera di misurare le superficie di questi corpi, non potendo essere quelle, che figure rettilinee unite insieme, e conseguentemente la lor misura dipende da quello, che si è detto nella prima parte.

I.

Per misurare la solidità de' corpi il più naturale è di ridurli tutti al solido più semplice; come per misurare le superficie, si sono ridotte al quadrato. Ora il cubo si è il solido più semplice, che è in effetto ne' solidi quello, che il quadrato è nelle super-

[Il cubo è una figura solida terminata da sei quadrati: ed è la comune misura de' solidi.

M

ſuperficie, cioè a dire è uno ſpazio come *abcdefgh*, di cui la lunghezza, la larghezza, e la profondità ſono uguali, o quello, che torna allo ſteſſo, è una figura terminata da ſei facce uguali, che ſono quadrati.

FIG. III.

Si chiama lato del cubo il lato de' quadrati, che li ſervono di faccia.

Per un piede cubico s'intende un cubo, il di cui lato è un piede; così un dito cubico è un cubo, il di cui lato è un dito.

II.

I ſolidi, che più comunemente ſi devono miſurare, ſono delle figure ABCDEFGH terminate per ſei facce rettangole ABCD, CBGF, CFED, DEHA, GFEH, ABGH. Si chiamano queſti ſolidi Parallelipipedi, perchè le loro facce oppoſte conſervando in tutti i loro punti la

FIG. I.

Il parallelipipedo è un ſolido terminato per 6. rettangoli.

la diſtanza medeſima l'una dall'altra, ſono dette parallele, nel modo medeſimo, che parallele ſono dette le linee, allorchè conſervano per tutto la diſtanza medeſima.

I piani paralleli ſono quelli, che conſervano ſempre tra loro la medeſima diſtanza.

III.

Ora ſe uno ſi propone di miſurare de' ſolidi di queſta ſpecie, l'analogia di queſto problema con quello, ove ſi è trattato della miſura delle ſuperficie rettangole, ſomminiſtrerà un mezzo facile per riſolverlo.

Miſura del parallelipipedo.

Si comincierà col miſurare ſeparatamente la lunghezza AD, la larghezza AB, e la profondità BG della figura propoſta, o in piedi, o in dita &c. Si moltiplicherà i tre numeri, che uno avrà trovato l'uno per l'altro, ed il prodotto, che verrà da queſta moltiplicazione, eſprimerà

quanto il parallelipipedo conterrà di piedi cubici, ò di dita cubiche &c. Per meglio dimostrare, come si fa questa operazione, noi ne daremo un esempio.

Supponghiamo, che la lunghezza AD sia di 6. piedi, la larghezza AB di 5., e la profondità BG di 4., il rettangolo ABCD (1. Part. Art. XI.) avrà sei volte cinque, ovvero 30. piedi quadrati. Se di poi s'immagina, che le linee BG, CF, DE, AH, che misurano tutte ugualmente la profondità del solido, siano ciascuna divise in quattro parti uguali, e che per li punti di divisione corrispondenti si faccia passare altrettanti di piani paralleli gli uni agli altri, questi piani divideranno il parallelipipedo proposto in quattro altri parallelipipedi, che avranno ciascuno un

un piede di profondità, e che saranno tutti uguali, e simili. Ora la sola vista della figura dimostra, che il primo di questi parallelipipedi contiene 30. piedi quadrati. Dunque il solido totale ABCDEFGH conterrà quattro volte 30., ovvero 120. piedi cubici.

I V.

Noi non ci fermeremo a spiegare i differenti mezzi, che si possono praticamente usare per costruire de' parallelipipedi, perchè questi mezzi sono per la maggior parte sì facili a trovare, che non vi ha persona, che non se li possa immaginare. Ma bensì daremo la formazione seguente del parallelipipedo, la quale è più utile a considerare delle altre.

Si concepisca un quadrato, ovvero un rettangolo ABGH, il quale si muo-

I parallelipipedi sono prodotti da un rettangolo, che si muo-

muove parallelamente a se medesimo.

muove parallelamente a se medesimo in modo, che i suoi quattro angoli A, B, G, H, facciano ciascheduno una delle quattro linee AD, BC, GF, HE, perpendicolari al piano del rettangolo ABGH.

V.

La linea perpendicolare a un piano è quella, che non pende da nessun lato sù questo piano.

Egli è il medesimo d'un piano perpendicolare a un altro piano.

E' presso che inutile l'avvertire, che sotto il nome di linee perpendicolari a un piano noi intendiamo una linea, che non pende da banda alcuna sù questo piano, e similmente che un piano, il quale non pende più da un lato, che da un altro sù un secondo piano, è detto perpendicolare a questo secondo piano: queste due definizioni sono analoghe a quelle, che noi abbiamo date di una linea perpendicolare a un'altra linea.

V I.

Fig. IV.

Ora da questo ne segue, che la linea

linea AB, che è perpendicolare al piano X, deve essere perpendicolare a tutte le linee AC, AD, AE &c., le quali partono dal piede A di questa linea, e sono dentro questo piano. Perchè egli è evidente, che se pendesse verso una di queste linee, ella sarebbe inclinata verso qualche lato del piano. Dunque non li sarebbe più perpendicolare.

La linea, che è perpendicolare a un piano, è perpendicolare a tutte le linee di questo piano, le quali partono dal punto, ove ella cade.

VII.

Per rappresentarsi di una maniera ben sensibile, come la linea AB può essere perpendicolare a tutte le linee, che partono dalla sua estremità A; non si dovrà fare, che una figura di rilievo nel modo seguente.

Si costruirà di qualche materia unita, e facile a spiegarsi, come è il cartone, un rettangolo FGDE diviso in due parti uguali dalla retta

Fig. V.

 AB,

AB, perpendicolare a' lati ED, FG, si piegherà poi questo rettangolo in maniera, che la piegha sia per lungo della linea AB, e così piegato si porrà sul piano X. Egli è evidente, che qualunque apertura si dia alle due parti FBAE, GBAD, del rettangolo piegato EADGBF, queste parti resteranno sempre applicate sul piano X, senza che la linea AB cangi di posizione riguardo a questo piano: dunque questa retta AB sarà perpendicolare a tutte le linee, le quali partono dal suo piede, e che saranno nel piano X, poichè i lati AE, AD del rettangolo piegato, saranno successivamente applicati sù ciascuna di queste linee, che abbiamo ora descritte.

Fig. VI.

VIII.

Dalla costruzione precedente si tira

tira una molto comoda pratica, per alzare da un punto dato sù un piano una linea perpendicolare a questo piano, o per calare da un punto preso fuori di questo piano una linea, che sia perpendicolare a questo piano. Perchè o che il punto proposto sia in quel piano, come in A, o sia fuori, come in H, si potrà sempre fare avanzare il rettangolo EFBGDA sul piano X, finchè la piegatura AB tocchi il punto dato, e in tutti e due i casi AB sarà la perpendicolare domandata.

FIG. VII.

Pratica semplice per elevare o abbassare linee perpendicolari a de' piani.

IX.

Ne segue ancora di là, che una linea AB sarà perpendicolare a un piano X, tutte le volte, che ella sarà perpendicolare a due linee AE, AD di questo piano. Perchè allora AB potrà riguardarsi, come la piegatura

Una linea sarà perpendicolare a un piano, se sarà perpendicolare a due linee di questo piano, le quali partono dal punto, ove ella cade.

tura di un rettangolo, del quale uno de' lati piegati si applichi sopra AE, e l'altro sopra AD. Or questa piegatura non potrà non essere perpendicolare al piano X.

X.

Maniera di elevare un piano perpendicolare ad un'altro.

Se si vuole elevare sopra una linea qualunque KL, un piano perpendicolare al piano X, nel quale è questa linea, si potrà per questo ancora servirsi del rettangolo piegato GBFEAD. Perchè e' non bisognerà, che posare sulla linea KL il lato AD d'una delle parti ADGB di questo rettangolo piegato; ed il piano di questa parte ADGB sarà quello, che si dimanda.

X I.

Fig. VIII.

Si vedrà facilmente, che se si posa un terzo piano Y sù i due lati FB, BG, del medesimo rettangolo piega-

to,

to, questo piano Y sarà ancora perpendicolare alla linea A B, e per conseguenza parallelo al piano X.

Dunque se a un piano X si alzino tre perpendicolari EF, AB, DG di eguale lunghezza, il piano Y, che passerà per li tre punti F, B, G, sarà parallelo al piano X.

Tirare un piano parallelo a un'altro.

X I I.

Quando due piani non saranno paralleli, e' sarà facile di conoscere l'angolo, che fanno tra loro, servendosi pure del nostro rettangolo piegato. Per ciò vedere, si applichi una delle due parti ABGD di questo rettangolo sul piano X, egli è evidente, che l' angolo EAD, ovvero il suo eguale FBG, misurerà l'inclinazione del piano EABF sul piano DABG. Ora se uno avverte, che AB è la comune sezione di questi

Fig. IX.

ſti piani, e che EA, e AD ſono ciaſcuna perpendicolari ad AB, ſe ne caverà ſenza difficoltà la ſeguente regola.

Miſurare l'inclinazione di un piano sù un'altro.

Eſſendo dati due piani non paralleli, ſi ha da cominciare dal trovare la linea retta, che è loro comune ſezione; dipoi da un punto qualunque di queſta linea, ſi tirino due perpendicolari, le quali ſieno ciaſcuna dentro uno di queſti piani, e l'angolo, che faranno tra loro queſte due perpendicolari, miſurerà l'angolo, che li due piani dati fanno tra loro.

XIII.

Siccome facilmente ognuno vedrà, che muovendoſi ABFE attorno della piegatura AB, la retta AE, di cui l'eſtremità E deſcrive un'arco di circolo ED, non eſce mai da un piano EAHD, perpendicolare al piano

X, e

X, e che l' inclinazione della retta EA ſul piano X non è in ſomma altro, che l'angolo EAD; conoſcerà ancora, che l'inclinazione di una retta qualunque EA ſul piano X, è miſurata per l'angolo EAH fatto tra queſta linea, e la linea AD, che paſſa per A, e per H punto del piano X, ove caſca la perpendicolare EH, abbaſſata sù queſto piano da un punto qualunque E della retta AE.

Miſurare l'inclinazione di una linea sù un piano.

XIV.

Il ſolo vedere la figura, di cui ci ſiamo ſerviti nell'Articolo precedente, ci fornisce di un nuovo mezzo d'abbaſſare da un punto E, fuori del piano X, una linea EH perpendicolare a queſto piano.

Avendo tirato una linea qualunque BAS nel piano X, ſi calerà dal punto dato E la perpendicolare EA a que-

Nuova maniera di calare una linea perpendicolare a un piano dato.

a questa linea. Ciò fatto, dal punto A, ove cade questa perpendicolare, si alzi nel piano X la AD perpendicolare ad AB, ed abbassando insieme dal punto dato E, alla retta AD la perpendicolare EH, questa linea sarà la perpendicolare al piano X.

X V.

Seconda maniera di alzare una linea perpendicolare a un piano dato.

Di quà si cava una seconda maniera di alzare al piano X una perpendicolare MN, da un punto M dato sù questo piano.

Avendo abbassato da un punto qualunque E preso fuori del piano X la perpendicolare EH a questo piano, si tirerà pel punto dato M la retta MN, che sia parallela ad HE, e quella sarà la perpendicolare al piano X.

Dopo

X V I.

Dopo il parallelipipedo, il solido più semplice è il prisma retto. Questo è una figura ABCDEFGHIKLM, di cui le due basi opposte, e parallele sono due poligoni eguali, e collocati talmente, che i lati GF, FE &c. dell'uno sieno paralleli a' lati BC, CD &c. dell'altro, e di cui le altre facce sieno rettangoli A B G H, BGFC &c.

FIG. X.

Il prisma retto è una figura solida, di cui le due basi opposte sono due poligoni uguali, le altre facce sono rettangoli.

X V I I.

I Geometri suppongono queste figure formate, come i parallelipipedi da una base ABCDLM, che si muove parallelamente a se medesima in maniera, che i suoi angoli A, B &c. scorrano lungo di linee perpendicolari al piano della base.

Formazione de' prismi retti.

X V I I I.

Per distinguere le differenti specie

cie di prismi retti, vi si aggiunge il nome del poligono, che loro serve di base. Il prisma esagonale, per esempio, è quello, di cui la base è un'esagono.

X I X.

Due prismi, che hanno le basi uguali, sono nella ragione medesimi delle loro altezze.

Per trovare la maniera di misurare tutte le sorti di prismi retti, gioverà l'osservare, che di due prismi retti, di cui le basi sieno eguali, quello, che avrà una più grande altezza, sarà più grande in solidità nella medesima ragione, che la sua altezza sarà più grande.

X X.

Due prismi, che hanno la medesima altezza, sono nella ragione medesima, che le loro basi.

Si osserverà ancora, che due prismi retti, che abbiano la medesima altezza, ma uno abbia una base, che contenga un certo numero di volte la base dell'altro, saranno tra loro nella medesima ragione, che le

lo-

loro baſi. La verità di queſta propoſizione ſi conoſcerà facilmente, facendo attenzione alla formazione de' priſmi ſpiegata nell'Artic. XVII.

Che *a b c d e f g h i k l m*, ed ABCDEFGHIKLM ſieno i due priſmi, che hanno la medeſima altezza, e che la baſe *abcdlm* del più piccolo, ſia, per eſempio, il quarto della baſe ABCDLM. Poichè i due priſmi ſono prodotti da' movimenti di queſte due baſi, ne ſegue, che un piano qualunque, che ſarà parallelo al piano, ove ſono le due baſi, taglierà dentro li due priſmi due poligoni, del quale ciaſcuno ſarà uguale alla baſe del priſma, in cui è tagliato: cioè a dire, che la ſezione del gran priſma ſarà ſempre quadrupla di quella del piccolo. Dunque il priſma ABCDEFGHIKLM po- FIG. X. e XI.

trà essere riguardato, come composto di sezioni tutte quadruple di quelle del prisma *abcdefghiklm*, e per conseguenza la solidità del primo prisma sarà quadrupla di quella del secondo.

XXI.

La misura del prisma retto è il prodotto della base per la sua altezza.

Dopo queste due osservazioni, e non sarà punto difficile di formar la regola seguente per misurare tutti i prismi retti.

Si misurerà in piedi, o in dita &c. quadrate, l'area della base del prisma proposto, poi si moltiplicherà il numero de' piedi, delle dita &c., che conterrà l'altezza del prisma, ed il prodotto darà il numero dei piedi, o dita &c. cubiche, contenute nel prisma proposto, e conseguentemente questa sarà la sua misura.

XXII.

XXII.

Il nome di prisma si dà ancora a' solidi (fig. XIII.) che hanno due basi poligone eguali, siccome i precedenti, ma le altre facce sono parallelogrammi, in luogo di essere rettangoli. Per distinguere questi nuovi prismi da quelli, de'quali abbiamo parlato, si chiamano prismi obliqui, per contraporli agli altri, che noi abbiamo chiamato prismi retti.

I prismi obliqui differiscono da' prismi retti in questo, che le facce, che sono in questi rettangoli, negli altri sono parallelogrammi.

XXIII.

I prismi obliqui si concepiscono formati da una base *abcki*, che si muove parallelamente a se medesima, e in tal maniera, che i suoi angoli secondino le linee parallele *ag*, *bh*, *cd* &c., che sono elevate fuori del piano della base, e che non le sono perpendicolari.

XXIV.

L'analogia, che vi è tra la formazione di questi, e quella de' prismi retti, di cui abbiamo parlato (Artic. XVII.) dà facilmente la misura della solidità de' prismi obliqui. Perchè se uno immagina al lato di un prisma obliquo *abcdefghik* un prisma retto ABCDEFGHIK, che abbia la medesima base, e che sieno questi prismi compresi tra due piani paralleli, si vedrà, che la solidità di questi due corpi sarà assolutamente la medesima.

Fig. XII., e XIII.

Perchè se per un punto qualunque P dell'altezza uno fa passare un piano parallelo alla base, le sezioni NOPQR *nopqr*, che questo piano formerà in ciascuno de' due prismi, potranno essere riguardate, come le basi eguali ABCKI, *abcki*

giunte

giunte a NOPQR, *nopqr* col movimento, che forma questi due prismi, e così queste due sezioni saranno poligoni uguali.

Ora se tutte le sezioni immaginabili, che si possono formare in questi due prismi per mezzo de'medesimi piani, che li segano, sono eguali, e converrà, che eguali sieno le somme di queste sezioni, cioè de' prismi.

Questa proposizione si suole ordinariamente proporre così. I prismi obliqui sono uguali a' prismi retti, allorchè hanno la medesima base, e la medesima altezza. Si chiama l'altezza del prisma la perpendicolare calata dal piano superiore sull'inferiore, o sopra di lui prolungato.

I prismi obliqui sono uguali a' prismi retti, allorche hanno la medesima base, e la medesima altezza.

XXV.

E come i parallelipipedi devono esser contati nel numero de' prismi, si stenderà a quello, che abbiamo detto de' prismi, a' parallelipipedi obliqui, cioè a dire alle figure *abcdefgh* prodotte col far muovere un quadrato, un rettangolo, ovvero un parallelogrammo talmente, che i suoi quattro angoli secondino le linee parallele, che sono sopra la base alzate obliquamente. Così il parallelipipedo obliquo *abcdefgh* sarà uguale al parallelipipedo retto ABCDEFGH, se la base *abgh* è la medesima, ovvero ha la medesima superficie, che la base ABGH, e se la perpendicolare calata dal piano *dcfe* sul piano *abgh* è uguale alla perpendicolare calata dal piano DCFE sul piano ABGH.

L'istesso è de' parallelipipedi obliqui, rispetto a' parallelipipedi retti.

TAVOLA XII.

FIG. I., e II.

XXVI.

XXVI.

Avendo veduto quello, che concerne i parallelipipedi, ed i prismi, esaminiamo ora le piramidi, cioè a dire i corpi, che sono, come ABCDEFG, compresi da un certo numero di triangoli, che partono tutti da una medesima sommità A, e che terminano a una base poligona qualunque BCDEFG. Egli è necessario di considerare queste sorti di solidi non solamente perchè si incontrano negli edifizj, e in altri simili lavori; ma ancora perchè tutti i solidi terminati da' piani, sono tante piramidi unite, siccome le figure rettilinee sono tanti triangoli. Per rendersi di questo certi, non bisogna fare altro, che tirare da un punto preso, ove uno vorrà, nell'interiore del corpo pro- FIG. III.

posto delle linee a tutti gli angoli di questi corpi.

XXVII.

Si distinguono le piramidi l'une dall'altre, come li prismi, dal nome della figura, che loro serve di base.

XXVIII.

Allorchè la piramide ha per base una figura regolare, e la sua sommità corrisponde perpendicolarmente al centro H della sua base, come nella Fig. III., la piramide è allora chiamata piramide retta; al contrario è nominata piramide obliqua, allorchè la sommità non è perpendicolarmente sopra al centro, come nella Fig. V.

XXIX.

Per vedere la maniera di misurare le piramidi di tutte le sorti, tanto

to rette, che oblique, cominciaremo dal fare sù queste figure alcune riflessioni generali, alle quali conduce la conoscenza delle proprietà dei prismi.

Subito che uno fa attenzione all' egualità de' prismi, che hanno la medesima base, e la medesima altezza, si ricorderà, che i parallelogrammi sono così uguali tra loro, allorchè hanno queste medesime condizioni, e l' istesso pure è de' triangoli.

Queste tre verità rappresentandosi alla mente, l' anologia deve portare a credere, che le proprietà, che sono comuni a' parallelogrammi, ed a' triangoli, le possono essere ancora a' prismi, ed alle piramidi; dunque si può congetturare, che le piramidi, che hanno la medesima base, e la

la medesima altezza, hanno la medesima solidità.

X X X.

Le seguenti riflessioni confermeranno questa congettura,

Fig. IV., e V. Sieno ABCDE, *abcde* due piramidi, delle quali le altezze AH, *ah* sieno le medesime, e le basi sieno due figure uguali, per esempio, due quadrati uguali BCDE, *bcde*: se uno s'immagina, che queste due piramidi sieno divise per una infinità di piani paralleli alle loro basi, si immaginerà facilmente, che queste sezioni di piramidi daranno de'quadrati eguali IKLM, *iklm*, e consequentemente che le due piramidi possono essere riguardate, come delle somme di un medesimo numero di sezioni, le quali in queste due piramidi saranno uguali ciascuna

alla

alla sua corrispondente. Dunque si concluderà, che la somma delle sezioni è la medesima da una parte, e dall'altra; cioè a dire, che le due piramidi hanno la medesima solidità.

Se le basi delle due piramidi fossero altri poligoni regolari, o irregolari BCDEF, *bcdef* eguali tra loro, non vi è nessuno, che non credesse, che tutte pure le sezioni IKLMN, *iklmn* dell'una, e dell'altra di queste due piramidi dovessero tra loro essere eguali, e che per conseguenza non conchiudesse, che le piramidi sarebbero le medesime, allorchè hanno la medesima base, e la medesima altezza.

FIG. VI., e VII.

XXXI.

Tutto questo è facile ad immaginare dopo la dimostrazione, che noi abbiamo dato dell' ugualità de'

pri-

prismi, che hanno la medesima altezza: contuttociò la similitudine tra qualunque sezione IKLMN di una piramide, e la base BCDEF, e l'ugualità delle sezioni IKLMN, e *iklmn* sono di quelle proposizioni, che ancorchè sensibili ad ognuno, hanno rigorosamente bisogno di dimostrazione: e per trovare questa vi è di bisogno di entrare in più considerazioni sulla similitudine delle figure solide.

XXXII.

Riprendiamo la piramide ABCDEF, e supponendola divisa per un piano IKLMN, parallelo alla base, dimostreremo, che la sezione, ovvero la divisione formata per questo piano nella piramide è un poligono perfettamente simile al poligono B C D E F, e che la piramide

FIG. IX.

de AIKLMN è essa medesima perfettamente simile alla piramide ABCDEF, cioè a dire, che gli angoli, che formano tutte le linee di queste due figure, sono respettivamente eguali, e che tutti li lati della piccola piramide avranno il medesimo rapporto tra loro, che quelli della grande.

XXIII.

Cominciamo dall' osservare, che se due piani X, ed Y sono paralleli, FIG. VIII. e che due linee qualunque ALD, AME partendo da un medesimo punto A, traversano questi due piani, le rette LM, DE, le quali congiungono i punti L, M, D, E, saranno parallele, la ragione si è, che se queste due linee non fossero parallele, si rincontrerebbero in qualche parte, essendo prolungate: ma se

se si rincontrassero i piani, ne' quali esse sono, e da' quali non possono partire, essi pure prolungati, quanto sarà necessario, si rincontreranno. Dunque non sarebbero più paralleli, come si suppone.

XXXIV.

Supposto dunque, che il piano IKLMN sia parallelo al piano BCDEF, ne seguirà, che tutte le linee ML, LK, KI, IN, NM saranno parallele alle linee ED, DC, CB, BF, FE, e conseguentemente, che li triangoli ALM, AKL, AIK &c. saranno simili alli triangoli ADE, ACD, ABC &c. Se uno prende l'uno de' lati di questi triangoli, per esempio, AM per comune misura, ovvero per scala di tutti li lati della piccola piramide, mentre che il lato corrispondente AE ser-

Fig. VI.

virà

virà di ſcala a' lati della grande, ſi vedrà facilmente, che i lati ML, LK, KI &c. del poligono IKLMN ſono proporzionali a'lati ED, DC, CB&c. del poligono BCDEFG.

Si vedrà ancora facilmente, che tutti gli angoli IKL, KLM &c. ſaranno reſpettivamente eguali agli angoli BCD, CDE, poichè li priſmi ſaranno formati da linee parallele a' lati de' ſecondi. Dunque li due poligoni IKLMN, BCDEF, ſaranno ſimili.

XXXV.

Tra i lati AM, AL, AK &c., eſſendo proporzionali a' lati AE, AD, AC &c., e gli angoli ALM, ALK &c. reſpettivamente eguali agli angoli ADE, ADC &c. a cauſa della ſimilitudine de' triangoli ALM, ADE, ALK, ADC &c.,

le

le due piramidi AIKLMN, ABCDEF, saranno intieramente simili.

XXXVI.

Finalmente se uno tira dal punto A, AH perpendicolare al piano, sul quale è fatto il poligono BCDEF, e che Q sia il punto, ove questa perpendicolare incontra il piano del poligono IKLMN, egli è chiaro, che le rette AQ, AH, altezze delle due piramidi AIKLMN, ABCDEF, saranno tra loro nella medesima ragione, che i lati omologhi AM, AE, AL, AD &c., ovvero, quello, che torna allo stesso, che se uno prende le altezze AQ, AH, per le scale delle due piramidi, i lati AM, AL &c. conterranno altrettante parti di AQ, che i lati AE, AD &c. contengono di parti di AH.

XXXVII.

XXXVII.

Fig. VI., e VII.

Se si torna ora a considerare le due piramidi ABCDEF *abcdef*, si vedrà, che le due sezioni IKLMN, *iklmn* essendo simili alle basi BCDEF, *b c d e f*, che sono le medesime, saranno simili tra loro. Si vedrà di più, che queste due sezioni saranno uguali fra loro, poichè le scale di queste due figure sono le rette uguali AQ, *aq*, altezze delle piramidi AIKLMN, *aiklmn*.

Le piramidi, che hanno la medesima base, e la medesima altezza, sono uguali.

Dunque, senza conoscere la solidità delle piramidi, si sà di già con certezza, che se esse hanno la medesima altezza, e la medesima base, sono uguali, come noi l'abbiamo congetturato (Art. XXIX.)

XXXVIII.

Due piramidi sono pure uguali, se avendo la mede-

Se le basi di due piramidi in luogo di essere le medesime, saranno

O sola-

desima altezza le loro basi, non essendo poligoni simili, sono eguali nella superficie.

FIG. VII., e XI.

solamente uguali nella superficie, le piramidi saranno ancora eguali in solidità: perchè sieno *abcdef*, e *arst* due piramidi, che hanno la medesima altezza *ab*, se noi dividiamo queste due piramidi per un piano qualunque parallelo alla base, egli è evidente, che l'istessa proporzione avrà l'area *iklmn* all'area *bcdef*, che l'area *uxy* all'area *rst*; poichè *iklmn*, *bcdef* essendo (1. Part. Artic. XXXIV.) figure simili, non differiscono (1. Part. Art. XLVIII.) che per le loro scale *aq*, *ab* &c.; e così le figure *uxy*, *rst*, essendo parimente simili; non differiscono esse pure, che per le loro scale, che sono ancora le linee *aq*, *ab*.

Ma se le basi *rst*, *bcdef* sono eguali in superficie, le loro parti proporzionali *uxy*, *iklmn*, sono ugua-

uguali: dunque tutte le ſezioni delle due piramidi *arſt*, *abcdeſ* avranno la medeſima eſtenſione: dunque tutte eſſe inſieme, cioè a dire le piramidi medeſime ſaranno eguali in ſolidità.

XXXIX.

Le piramidi, che hanno la medeſima altezza, ſono tra loro, come le loro baſi.

Se la baſe *bcdeſ* della prima piramide contiene un numero determinato di volte la baſe *rſt*, la ſolidità della prima piramide *abcdeſ* conterrà il medeſimo numero di volte la ſolidità della ſeconda *arſt*.

Perchè in queſto caſo la baſe *bcdeſ* eſſendo diviſa in più parti, delle quali ciaſcuna ſia uguale alla baſe *rſt*, ſi potrà concepire la piramide *abcdeſ*, come compoſta di più altre piramidi, che abbiano per baſi le parti di *bcdeſ*. Or ciaſcuna di queſte nuove piramidi ſarà uguale

alla ſeconda piramide *arſt*, ſecondo che noi l' abbiamo provato nell' Articolo precedente: dunque &c.

Che ſe la baſe *rſt*, non veniſſe eſattamente contenuta nella baſe *bcdef*; ma aveſſero queſte baſi una miſura comune X, ſi doveva ciaſcuna di queſte due baſi *bcdef*, *rſt* dividere in parti uguali ad X, e ſi ſarebbe veduto, che le due piramidi *abcdef*, *arſt* erano compoſte di piramidi tutte tra loro eguali tante, quante le due baſi contenevano parti eguali di X, dunque le piramidi *abcdef*, *arſt* ſaranno tra' loro, come le loro baſi.

E ſe le baſi foſſero incommenſurabili, ſi ſarebbe ſempre vedere, malgrado ancor di queſto, che le piramidi ſarebbero tra loro nella me-

medesima ragione, che le loro basi, servendosi di una introduzione simile a quella, che abbiamo usata in un simil caso (2. Part. Articolo XXVIII.) allorchè si trattava di paragonar le figure, che avevano i lati incommensurabili; cioè a dire, che si diminuerebbe all'infinito la misura X di maniera, che si potesse pigliare per misura comune tanto della base *rst*, che della base *bcdef*.

X L.

Avendo scoperto, che le piramidi, le quali hanno la medesima altezza, sono nella medesima ragione delle loro basi, subito uno si accorge, che la misura della loro solidità, non ha gran difficoltà.

Perchè non si tratta più, che di saper misurare una sola piramide FIG. X., e XI.

per misurare tutte le altre. Supponghiamo, per esempio, che noi sappiamo misurare la piramide ABCDE, e che si domandi la misura della piramide ASTVXY, che non ha nè la medesima base, nè la medesima altezza della prima, noi cominceremo dal fare una piramide simile alla piramide ABCDE, e che ha l' altezza della piramide ASTVXY, ciò che sarà facile: perchè basterà (Articolo xxxv.) prolungare i lati AB, AC, AD, AE, e tagliarli col piano LMNO, di cui la distanza AG fino alla sommità A, sia uguale all' altezza AQ.

Questo fatto, poichè per la supposizione fatta noi sappiamo misurare la piramide ABCDE, egli è evidente, che noi sapremo misura-

re

re pure la piramide ALMNO, che le è ſimile. Perchè qualunque ſieno le operazioni, per le quali ſi miſura la piramide ABCDE, ſi potrà ſempre fare le medeſime operazioni per miſurare la piramide ſimile ALMNO, ſoltanto che ſi adopri in queſta una differente ſcala.

Supponendo dunque, che la piramide ALMNO ſia miſurata, la ſua miſura determinerà quella della piramide propoſta ASTVXY: perchè per l'Articolo precedente queſte due piramidi ſono tra' loro, come le loro baſi LMNO, STVXY, e noi abbiamo inſegnato nella ſeconda parte a trovare il rapporto di queſte due baſi.

X L I.

Poichè dunque non ſi tratta, che

di misurare una sola piramide per saper misurare tutte le altre piramidi immaginabili, proponghiamocene una semplicissima, che si può formare, tirando da quattro angoli A, B, C, H, d'una faccia di un cubo ABCDEFGH, quattro linee al punto O, centro di questo cubo, cioè a dire al punto in egual distanza posto da A, D, B, E &c.

FIG. XII.

Si vede subito, che questa piramide è la sesta parte del cubo, poichè si può il cubo risolvere in sei piramidi uguali, prendendo ciascheduna sua faccia per base. Ora il valore del cubo è il prodotto dell' altezza AF per la base ABCH. Dunque per avere il valore della piramide, bisognerà il prodotto di AF per ABCH partire in sei parti

ti uguali; ovvero, quello, che torna allo stesso, bisognerà moltiplicare la sesta parte dell'altezza AF, per la base ABCH, e come la sesta parte dell'altezza AF, è il terzo della altezza OL della piramide OABCH, poichè la sua altezza OL è la metà del lato del cubo, ne segue, che la misura della piramide OABCH è il prodotto del terzo della sua altezza per la base.

XLII.

Supponendo ora, che s'abbia a misurare una piramide qualunque OKMNSTV, si immagini un cubo, di cui il lato AB, o AF sia doppio dell'altezza OL della piramide proposta, e si concepisca dentro questo cubo una piramide OABCH, la punta di cui sia al centro, e che abbia per base una delle facce ABCH del

Fig. XIII.

del cubo. Questa nuova piramide avrà la medesima altezza della prima, e per conseguenza (Articolo XXXIX.) la solidità di OABCH, sarà a quella di OKMNSTV, come la base A B C H alla base KMNSTV: ora per l'Articolo precedente il prodotto del terzo dell'altezza comune OL per la base ABCH è il valore della piramide OABCH: dunque il prodotto del terzo della medesima altezza comune OL per la base KMNSTV sarà il valore della piramide proposta OKMNSTV.

La solidità di una piramide qualunque è il prodotto della sua base nel terzo della sua altezza.

Quindi si forma questo generale Teorema, che una piramide ha per misura il prodoto della sua base nel terzo della sua altezza.

XLIII.

XLIII.

Come noi abbiamo veduto (Articolo XXI.), che la solidità di un prisma è il prodotto della base per la sua altezza, egli è chiaro per l'Articolo precedente, che le piramidi saranno sempre il terzo de' prismi, che hanno la medesima base, e la medesima altezza.

La piramide è il terzo del prisma, che ha la medesima base, e la medesima altezza.

XLIV.

Dopo aver misurato tutti i solidi terminati da superficie piane, cerchiamo ora la maniera di misurare i terminati da superficie curve. E siccome noi nella terza parte non abbiamo trattato, che delle figure, di cui il contorno non contiene altre curve, che il circolo; noi non esamine-

mineremo, che i capi, di cui le curvature ſono circolari.

Nell'eſame di queſti corpi noi avremo due objetti, la miſura delle loro ſuperficie, e quella della ſolidità: Perchè eſſendo queſte ſuperficie o intieramente curve, o in parte piane, e in parte curve, noi non potremo richiamare la loro miſura alla prima parte, ſiccome noi abbiamo fatto quanto a i corpi terminati da ſuperficie piane.

X L V.

Tavola XIII. Fig. I., e II.

Il cilindro è un ſolido teminato da due baſi opposte, e parallele, che ſono circoli uguali, e da un piano piegato intorno le loro circonferenze

Il più ſemplice di tutti i ſolidi curvilinei è il cilindro. Queſto è un corpo, come ABCDEF, di cui le due baſi ABC, DEF, ſono due circoli uguali congiunti con una ſuperficie curva, che ſi può immaginare formata da un piano pie-

piegato attorno alla loro circonferenza.

Allorchè due circoli sono collocati in maniera, che il centro G del primo corrisponde perpendicolarmente sopra al centro H del secondo, il cilindro si chiama retto.

Fig. I.

Si divide in cilindro retto, e in cilindro obliquo.

Il cilindro si chiama al contrario obliquo, allorchè la linea tirata per i due centri G, e H è obliqua rispetto a' piani ABC, DEF.

Fig. II.

XLVI.

Formazione del cilindro.

La formazione geometrica di questi solidi analoga a quella de' prismi, e de' parallelipipedi, di cui si è parlato (Articolo XVII.) consiste a far muovere un circolo parallelamente a se stesso in modo, che tutti i suoi punti descrivano linee ret-

rette parallele, che ſi alzino fuori del piano di queſto circolo.

XLVII.

Si potrà miſurare nella ſeguente maniera la ſuperficie di un cilindro retto: ciò, che ſpeſſo è neceſſario di fare per la proprietà.

FIG. I. Le due circonferenze ABC, DEF, eſſendo ciaſcuna diviſa nel medeſimo numero di parti eguali, ſicchè i punti di diviſione di ſotto corriſpondano agli altri di ſopra, ſi tirino delle linee rette, che congiungano gli angoli corriſpondenti de' due poligoni regolari, che dà queſta operazione. Egli è chiaro, che ſi avrà allora un priſma, la ſuperficie del quale ſarà compoſta di altrettanti rettangoli compreſi nella ſuperficie del cilindro, quanto vi ha di lati compreſi in ciaſcuna

ſcuna di queſte circonferenze ABC, DEF. Ora ciaſcuno di queſti rettangoli avendo la loro altezza uguale ad AD, la lor miſura totale ſarà il prodotto dell'altezza AD per la ſomma di tutte le baſi, cioè a dire pel contorno del poligono compreſo o iſcritto dentro il circolo DEF, ovvero ABC.

Ma ſiccome a miſura, che il numero de' lati di queſto poligono ſarà grande, il contorno del poligono ſi approſſimerà ſempre più alla circonferenza, e la ſuperficie del priſma a quella del cilindro; ne ſegue, che ſe uno s'immagina, che il numero de' lati di queſto poligono diventi infinito, il priſma non ſarà più differente dal cilindro. Dunque la ſuperficie curva del cilindro retto è uguale ad un rettangolo, di cui l'altezza ſarà AD,

La ſuperficie curva di un cilindro retto è uguale a un rettangolo, che ha la mede-

desima altezza, e di cui la base è uguale alla sua circonferenza

AD, e la base una linea retta uguale alla circonferenza DEF.

Questa proposizione può servire a trovare, per esempio, quanta stoffa è necessaria per coprire una colonna cilindrica, o per parare al di dentro una Torre tonda.

XLVIII.

Quanto alla superficie del cilindro obliquo, non si può misurare nella medesima maniera: perchè in luogo di rettangoli si troverà de' parallelogrammi di diversa altezza. Solo per via di metodi involuti, e difficili si è arrivato a conoscere il valore approssimato di tali superficie; ed i problemi di questo genere non sono da elementi.

XLIX.

Riguardo alla solidità de' cilindri o ret-

o retti, ovvero obliqui, si trova facilissimamente. Perchè egli è evidente, che tutto quello, che noi abbiamo detto de' prismi, converrà a' cilindri, se si riguardono i cilindri, come gli ultimi prismi, che si può loro inscrivere.

E così i cilindri, che avranno la medesima base, e la medesima altezza, saranno eguali in solidità.

I cilindri, che hanno l'istessa base, e altezza, sono eguali in solidità.

L.

E la misura di un cilindro qualunque sarà il prodotto della sua base per la sua altezza.

La misura di un cilindro qualunque è il prodotto della sua base per la sua altezza.

L I.

Il cono è il più semplice solido de' curvi dopo il cilindro; questo è una figura, come ABCDE, che ha per base un circolo, ed ha la superficie com-

Fig. III., e IV.

Il cono è una specie di piramide, che ha per base un circolo.

posta di una infinità di linee rette, che vengono tutte dalla sommità A alla circonferenza BCDE di questo circolo. Si può riguardar questo solido, come una piramide, che ha per base un circolo.

L I I.

Si distingue in cono retto, e in cono obliquo.

Se, come nella Figura III., la punta, o sommità A del cono corrisponde perpendicolarmente sopra il centro O della base, il cono è chiamato retto; se la sommità corrisponde a un punto differente dal centro della base, Fig. IV., è chiamato obliquo.

L I I I.

Fig. III.

Per misurare la superficie di un cono retto ABCDE, si riguarderà, come l'ultimo delle piramidi, che li si possono iscrivere; cioè a dire, si di-

divida la circonferenza della sua base BCDE, come si è fatto della circonferenza del cilindro in una infinità di piccoli lati, e tirando delle linee da tutti gli angoli alla sommità del cono A, si troverà, che la superficie conica è un' ammasso di una infinità di piccoli triangoli isosceli, l'altezza de' quali è uguale al lato AB del cono, e de' quali tutte le basi insieme unite sono eguali alla circonferenza BCDE; di dove è facile il vedere, che la misura di questa superficie si troverà moltiplicando la metà di AB per la circonferenza BCDE.

La superficie di un cono retto si misura moltiplicando la metà del suo lato per la circonferenza della sua base.

L I V.

Se uno si ricorda, che la superficie di un settore di questo circolo è uguale (III. Part. Art. X.) al prodotto dell' arco

arco di questo settore per la metà del raggio, si vedrà, che per coprire il cono retto ABCDE d'una superficie, che si pieghi, come di cartone &c. bisognerà prendere un settore di circolo, il raggio del quale sia eguale ad AB, e l'arco alla circonferenza BCDE.

Un settore di circolo è la superficie svoltolata di un cono.

L V.

Allorchè il cono è obliquo, la misura della sua superficie, come quella del cilindro obliquo, è assai difficile a trovare anco d'una maniera approssimata, e questo pure è un problema, che non ha luogo negli Elementi.

L V I.

Quanto alla solidità de' coni o retti, ovvero obliqui, si riguarderanno

no questi, come le ultime piramidi, che si possano loro inscrivere, e per conseguenza si potrà loro applicare quel, che si è detto delle piramidi in generale.

E così i coni, che hanno la medesima base, e la medesima altezza, sono uguali.

I coni, che hanno l'istessa base, ed altezza, sono uguali.

L V I I.

E la solidità di un cono qualunque sarà il prodotto della base pel terzo della sua altezza.

La lor misura è il prodotto della base pel terzo della altezza.

L V I I I.

Vien qualche volta il bisogno di misurare un corpo, come BCDEFGH, che si chiama cono troncato, cioè la parte, che resta di un cono AFGH, allorchè se ne leva un' altro cono più piccolo ABCDE per una sezione

Fig. V. 2 VI.

parallela alla base FGH. Egli è evidente, che la misura di questo solido sarà la differenza tra la solidità di due coni ABCDE, AFGH.

L I X.

Quanto alla superficie di un cono troncato, se egli è stato formato dalla sezione di un cono retto, si può trovare qualche cosa di più semplice, che di misurare separatamente le superficie de' due coni, e sottrarne l'una dall'altra. Si impiegherà per ciò ottenere il seguente metodo, che è facile ad immaginarsi dopo quello, che già si è detto (Articolo LIV.)

FIG.VI., e VII. Supponghiamo, che ALR sia il settore, che bisogna costruire per potere coprire il cono AFGH, se si descriva dal centro A coll' intervallo

lo AM eguale ad AB un'arco MP, egli è chiaro, che lo ſpazio MPRL, ſarà una porzione di circolo, capace a coprire la ſuperficie cercata del cono troncato. Ora ſe uno s'immagina, che le due circonferenze, delle quali MP, ed LR ſono archi ſimili, ſieno finite, ſi avrà un circolo intiero, la miſura del quale (3. Part. Art. VIII.) ſarà il prodotto di ML eguale a BF, per la circonferenza, di cui AN è il raggio, eſſendo N il mezzo di ML. Dunque la porzione del circolo MPRL, ovvero la ſuperficie del cono troncato BCDEFGH, che gli è eguale, ſi muſurerà moltiplicando ML, per l'arco NQ, ovvero quel, che torna all'iſteſſo, moltiplicando BF, per la circonferenza IKL, che dà la ſezione del ſolido propoſto per un piano parallelo al-

Maniera di miſurare la ſuperficie di un cono troncato.

la base, e che passa per il mezzo del lato BF.

L X.

La sfera è un corpo, la superficie del quale ha tutti i punti egualmente distanti dal centro.

L'ultimo de' corpi solidi, de' quali noi tratteremo, si chiama sfera, ovvero globo; cioè quello, la superficie del quale ha tutti i suoi punti egualmente distanti da un medesimo punto, che n'è il centro. Spesso occorre di misurare questa superficie; per esempio, si vorrà sapere, quanto vi vorrà di doratura per una palla; quanto di piombo per una cupola &c.

L X I.

Fig. VIII.

Sia X la sfera, di cui si ha da misurare la superficie, egli è evidente, che si può concepire questo solido, come prodotto dalla rivoluzione di un semicircolo AMB attorno al suo diametro AB.

Sup-

Supponghiamo, che in luogo della mezza circonferenza, noi abbiamo un poligono regolare di un numero infinito di piccoli lati, o se uno vuole, di un grandissimo numero di lati, e si voglia misurare solamente la superficie Z prodotta dalla rivoluzione di questo poligono. Sarà facile di passare alla misura delle superficie della sfera, siccome noi siamo passati dalla misura delle figure rettilinee a quella del circolo.

LXII.

Per misurare la superficie del solido Z, esaminiamo la piccola parte di questa superficie, che produce un solo lato qualunque M *m* del poligono inscritto, mentre che egli gira attorno il diametro AB. Egli è evidente, che questo lato M *m* descrive in

in questo movimento una superficie del cono tronco V. Perchè prolungando la retta *m* M, finochè ella rincontra in T il diametro, ovvero asse della rivoluzione AB, se questa linea TM*m* gira nel tempo medesimo, che il semicircolo AMB, descriverà manifestamente un cono retto, la sommità del quale sarà T, e la base il circolo descritto dal punto *m*; in maniera, che la superficie V prodotta dal muoversi M *m* sarà una sezione di questo cono, compreso tra i piani de' circoli, che i punti M, e *m* girando descrivono. Ma, secondo che noi abbiamo veduto (Art. LIX.) la superficie V è uguale a un rettangolo, che ha per altezza M *m*, e per base una linea eguale alla circonferenza KLO descritto dal punto K, mezzo di M *m*. Dunque la superficie pro-

TAVOLA XIV. FIG. I.

prodotta dalla revoluzione del poligono è uguale alla ſomma di altrettanti rettangoli di queſta natura, quanti vi ha lati in queſto poligono, come M*m*.

Or come tutti i lati M*m*, altezza di queſti rettangoli, ſono ſuppoſti eguali, ſi potrà riguardare la ſuperficie cercata, come un rettangolo totale, che avrà l'altezza M*m* con una baſe uguale alla ſomma di tutte le circonferenze, come KL, cioè deſcritte da' punti di mezzo di ciaſcuno piccol lato.

Ma il poligono iſcritto nel ſemicircolo AMB, avendo un grandiſſimo numero di lati, la piccolezza dell'altezza M*m*, e la grandezza eccesſiva della baſe rendono queſto rettangolo impoſſibile a coſtruirſi.

Per rimediare a queſto inconvenien-

niente, è facile d'immaginarsi tutti questi piccoli rettangoli mutati in altri, che abbiano sempre la medesima altezza, non impercettibile, come M *m*, ma assai grande, purchè ciascuna delle basi diventi assai piccola; facendo questo l'addizione di tutte queste piccole basi, farà una lunghezza paragonabile all'altezza.

LXIII.

Vediamo dunque, se noi possiamo in questo modo cangiare i nostri piccoli rettangoli. Ponghiamo per rendere semplice il problema, che i nostri rettangoli in luogo di aver per basi linee uguali alle circonferenze KL, non abbiano per basi, che li raggi KI di queste circonferenze. Non sarà allora difficile di applicarle quel,

FIG. II.

che

che abbiamo trovato per questi ultimi rettangoli, a quelli, de' quali noi dobbiamo parlare.

Si tratta dunque di trovare un rettangolo, che abbia per misura il prodotto di M*m* per KI; e che abbia per altezza qualche linea incomparabilmente più grande, che M *m*, e che sia la medesima in qualunque luogo sia collocato questo piccolo lato M *m*. Scegliamo, per esempio, la retta CK, che è l'apotema del poligono, del quale M *m* è il lato, e che per conseguenza è sempre il medesimo a qualunque lato del poligono, che egli appartenga. Noi dobbiamo dunque cercare una linea, di cui il prodotto per CK sia eguale al prodotto di KI per M *m*; cioè a dire (2. Part. Art. VII.) bisogna trovare una quarta proporzionale alle tre linee KC, KI, M *m*.

M*m*. Ora noi ſappiamo, che per mezzo de' triangoli ſimili, ſi trova nelle figure delle linee proporzionali. Biſogna dunque formare de' triangoli ſimili, ne' quali i lati omologhi ſieno le linee, che ſi cercano; ciò che ſi farà calando MR perpendicolare a *mp*. Si avrà allora i triangoli M*m*R, KIC ſimili; perchè ſarà ciaſcuno rettangolo, l' uno in R, l'altro in I, e di più gli angoli *m*MR, IKC ſaranno uguali tra loro, perchè il primo fa un' angolo retto coll' angolo M*m*R uguale all' angolo MKI, e l' altro IKC fa pure un retto coll' angolo MKI.

Di là ſi può facilmente concludere, che KC è a KI, come M*m* a MR, cioè a dire MR è la quarta proporzionale cercata; o quello, che è il medeſimo, che il rettangolo di

KC

KC per MR, o per Pp è uguale al rettangolo di Mm per KI.

Ma ſiccome il rettangolo, che noi volevamo mutare, non era quello di Mm per KI, ma di Mm per la circonferenza, di cui KI è il raggio, noi ci ricorderemo quì, che le circonferenze ſono tra loro, come i raggi: quello, che fa, che l'egualità, che è tra 'l rettangolo di Mm per KI, e quello di Pp per CK, ne tira neceſſariamente l'egualità del rettangolo di Mm per la circonferenza di KI al rettangolo di Pp per la circonferenza di CK. Perchè ſi vede facilmente, che ſe due rettangoli ſono eguali, e conſervando le loro altezze, ſi aumentano proporzionalmente le loro baſi, queſti rettangoli ſeguitano ad eſſere eguali.

L X I V.

Avendo trovato ne' due Articoli precedenti, che tutte le piccole superficie coniche tronche, come V (fig. 1.) sono eguali ad altrettanti rettangoli, che abbiano tutti per altezza una medesima retta uguale alla circonferenza, di cui K C sarà il raggio; e de' quali rettangoli ciascuno abbia per base una piccola retta P *p* corrispondente a ciaschedun lato M *m*, se ne ricaverà, che una somma qualunque di queste piccole superficie prese, per esempio, da A fino a *p*, sarà uguale a un rettangolo, che abbia per altezza una retta uguale alla circonferenza di C K, e per base la somma di tutte le linee tali, quale è P *p*, prese da A fino a *p*, cioè la retta A *p*.

Dun-

Dunque per avere la ſuperficie totale, prodotta dalla rivoluzione del poligono intero, biſogna fare un rettangolo, di cui la baſe ſia uguale alla circonferenza deſcritta dal raggio C K, e che abbia un' altezza uguale al diametro A B.

L X V.

Riuſcirà ora coſa faciliſſima il miſurare la ſuperficie della sfera. Perchè è chiaro, che più che vi avrà di lati nel poligono, più il ſolido prodotto per la ſua rivoluzione ſi approſſimerà all' eſſer di sfera, e così più l' apotema C K ad eſſere uguale al raggio, in modo, che ſe uno ſi può immaginare, che il poligono ſia diventato un circolo, l' apotema C K ſarà il raggio medeſimo, e la ſuperficie della sfera avrà la medeſima eſtenſione, che un ret- tan-

La ſuperficie della sfera ha per miſura il prodotto del ſuo diametro per la circonfe-

Q

ferenza del suo circolo massimo.

tangolo, del quale l'altezza, e la base sieno l'una il diametro, e l'altra una linea uguale alla circonferenza del circolo, che l'ha prodotto, e che si suole ordinariamente chiamare il circolo massimo della sfera.

L X V I.

Cosa sia un segmento di sfera.

FIG. III.

Come si misura la sua superficie.

Quanto alla superficie curva di un segmento di sfera AMLNO, cioè della parte di sfera, che viene tagliata, allorchè si divide per un piano MLNO perpendicolare al diametro; ella ha per misura il prodotto della sua grossezza, o vogliamo dire del dardo AP per la circonferenza del massimo circolo AMBN. La ragione è la medesima, che quella, colla quale abbiamo provato (Articolo LXIV.) che la somma della superficie di tutti i piccoli coni troncati compresi da A fino a *m* è ugua-

uguale al rettangolo, di cui l'altezza è Ap, e la base una linea uguale alla circonferenza, di cui CK è il raggio.

L X V I I.

La misura precedente della superficie della sfera ci mostra, che se uno fa girare il rettangolo ABDE, e nel tempo medesimo il semicircolo AMNB intorno ad AB, la superficie curva del cilindro retto EFGIKDH prodotta per la rivoluzione di questo rettangolo, sarà uguale a quella della sfera descritta dal semicircolo; ciò che si esprime ordinariamente così; la superficie della sfera è uguale a quella del cilindro circoscritto.

Fig. IV.

La superficie della sfera è uguale a quella del cilindro circoscritto.

L X V I I I.

E se uno divide tanto il cilindro, quanto la sfera per due piani qualun-

Le sezioni del cilindro, e della sfera hanno la medesima superficie.

que perpendicolari al diametro AB in P, e in Q, le sezioni della sfera, e del cilindro, che saranno prodotte dal movimento della retta OS, e dall'arco MN, saranno quanto alla superficie uguali.

L X I X.

La superficie della sfera è uguale alla superficie del suo circolo massimo presa quattro volte.

Si vede ancora da quel, che già abbiamo detto, che la superficie della sfera è uguale all'area del suo circolo massimo presa quattro volte. Perchè la superficie di questo circolo ha per misura il prodotto della metà del raggio, o quarta parte del diametro per la circonferenza; e la superficie della sfera è uguale al prodotto del diametro intiero per la medesima circonferenza.

L X X.

Trovata la misura della superficie della sfera è facile di misurare la sua so-

ſolidità : perchè ſi può conſiderare la sfera, come un'infinità di piccole piramidi poſte inſieme, le ſommità delle quali ſono nel ſuo centro, e tutte le baſi cuoprono l'intera ſuperficie. Ora ciaſcuna di queſte piramidi avendo per miſura il prodotto del terzo della ſua altezza, cioè del raggio per la ſua baſe, la loro ſomma totale, o ſolidità della sfera ſi miſurerà moltiplicando il terzo del raggio per la ſua ſuperficie, cioè per l'area del maſſimo circolo preſa quattro volte.

La ſolidità della sfera è il prodotto del terzo del raggio per l'area del maſſimo circolo preſa quattro volte.

L X X I.

Siccome il medeſimo è il dire il prodotto del terzo del raggio per il maſſimo circolo preſo quattro volte, e il prodotto del terzo del raggio preſo quattro volte, cioè di due terzi del diametro pel circolo maſ-

ſimo; e che la ſolidità del cilindro EFGIKDH ha per miſura il prodotto del diametro pel circolo maſſimo, che li ſerve di baſe, ne ſegue, che la ſolidità della sfera è due terzi di quella del cilindro circoſcritto.

La ſolidità della sfera è due terzi di quella del cilindro circoſcritto.

L X X I I.

Miſura della ſolidità di un ſegmento di sfera.

FIG. III.

Se uno ſi propone di miſurare la ſolidità di un ſegmento di sfera AMLNO, egli è evidente, che biſogna miſurare la porzione di sfera prodotta per la rivoluzione del ſettore CAM; ciò che ſi farà moltiplicando il terzo del raggio per la ſuperficie del ſegmento della sfera propoſta AMLNO: e inſieme ſi detrarrà da queſta miſura quella del cono prodotto per la rivoluzione del triangolo CPM, cioè il cono, che ha per baſe il circolo MLNO, e l'altezza CP;

CP; ed il resto sarà il valore dimandato del segmento.

LXXIII.

Noi finiremo questi Elementi con qualche proposizione sulla solidità, e sù la superficie de' corpi simili. Queste proposizioni da se naturalmente ci si presentano, allorchè si riflette sù ciò, che costituisce la similitudine di due corpi. Si può dire ancora, che si discuoprono dalla analogia, se uno riflette a ciò, che abbiamo già detto (1. Part. Articolo XXXIV., e seguent.) della similitudine delle figure piane, cioè di quelle, che sono descritte sù de' piani.

Noi abbiamo determinato (Articolo XXXII.) in che consiste la similitudine di due piramidi. La definizione da noi allora data delle piramidi simili si può stendere a tutti i cor-

corpi terminati da' lati de' piani: cioè a dire, che due corpi di questa natura saranno chiamati simili, se tutti gli angoli formati da' lati del primo sono eguali agli angoli formati da' lati del secondo, e se i lati d'uno di questi corpi sono proporzionali a' lati omologhi dell' altro.

In che consiste la similitudine di due corpi terminati da' piani.

L X X I V.

Quanto a' corpi, che non sono terminati da tutte le bande da' piani, per esempio, i cilindri, ed i coni, è facile di determinare le condizioni necessarie per renderli simili.

Due cilindri retti saranno simili, se le loro altezze sono nella medesima ragione, che i raggi delle loro basi.

Condizioni, che determinano la similitudine di due cilindri retti.

L X X V.

Se i cilindri sono obliqui, sarà di più necessario, che le linee, le quali congiungono i centri di due circoli,

Quelle di due cilindri obliqui.

li, in ciascuno di questi cilindri facciano i medesimi angoli sulli piani delle loro basi.

LXXVI.

Quelle di tre coni.

Le medesime definizioni si possono applicare a' coni, mettendo in luogo della linea, che passa per li centri delle due basi del cilindro, quella, che và dalla sommità del cono al centro del circolo, che gli serve di base.

LXXVII.

Quelle di due coni tronchi.

Perchè due coni tronchi sieno simili, è necessario in primo luogo, che que' coni, de' quali essi sono parte, sieno simili l'uno all'altro; in secondo luogo, che le loro altezze sieno tra loro, come li raggi delle basi.

LXXVIII.

Quanto alle sfere, si vede subito, che

Le sfere, i cubi, e tutte le figure, che non dipendono, che da una sola linea, sono tutte simili.

che esse sono tutte simili le une all' altre; e così che tutte le figure o solide, o piane, che non hanno bisogno, che di una sola linea per essere determinate, come il circolo, il quadrato, il triangolo equilatero, il cubo, il cilindro circoscritto alla sfera &c.

L X X I X.

In generale i solidi simili non differiscono, che per le scale, sulle quali sono stati costruiti.

In generale si potrà dire delle figure solide simili quello, che si è detto delle figure piane; che esse non differiscono, che per le scale, sopra le quali sono state costruite.

Questo solo, che abbiamo detto, ben considerato conduce a due proposizioni fondamentali sulla superficie, e sulla solidità de' corpi simili.

L X X X.

La prima proposizione c'insegna, che le superficie di due solidi simili

sono

ſono tra loro, come i quadrati de'loro lati omologhi; per eſempio, che vi ha il medeſimo rapporto tra le ſuperficie di due piramidi ſimili z, e Z, che tra' quadrati *abcd*, ABCD fatti ſu' lati *ab*, AB, che ſi riſpondono in queſte due piramidi.

Le ſuperficie de'ſolidi ſimili ſono tra loro, come i quadrati de' loro lati omologhi.

FIG. V., e VI.

Per diſcoprire la verità di queſta propoſizione non vi ha biſogno, che de' diſcorſi fatti (1. Part. Articolo XLIII., e XLIV.) cioè a dire, che biſogna ſolamente conſiderare, che ſe P è la ſcala della piramide Z, e *p* la ſcala della piramide ſimile z, le linee, che biſogna impiegare per miſurare la ſuperficie di Z, e quella del quadrato ABCD avranno il medeſimo numero di P, che v'avrà di parti *p* in quelle, di cui ſi deve uno ſervire per miſurare la ſuperficie z, e quella del quadrato *abcd*.

Donde

Donde ne segue, che il prodotto delle linee, che entrano nella misura di Z, e di ABCD darà il medesimo numero di quadrati X fatti sù P, che il prodotto delle linee prese a misurare z, e $abcd$ darà di quadrati x fatti sù p: cioè a dire, che i numeri, che esprimono il rapporto della superficie della piramide Z al quadrato ABCD, saranno i medesimi, che quelli, che esprimeranno il rapporto della superficie z al quadrato $abcd$.

Si farà il medesimo discorso nella comparazione di tutti gli altri corpi simili, o sieno terminati da' piani, ovvero da superficie curve: Perchè le linee impiegate a misurare le superficie di tutti questi corpi avranno sempre il medesimo numero di parti delle loro scale; e per conseguenza il prodotto di queste linee

con-

conterrà un medesimo numero di volte i quadrati di queste medesime parti.

E se le linee necessarie per misurare la superficie de' corpi simili fossero incommensurabili, è chiaro, che la dimostrazione sussisterebbe sempre, purchè quivi si impieghino i principj, de' quali ci siamo serviti (2. Part. Art. XXVIII.) per paragonare insieme le figure simili, delle quali i lati erano incommensurabili.

L X X X I.

Si proverà nella medesima maniera, che le superficie delle sfere sono tra loro, come i quadrati de' loro raggi. Ma per vederlo ancora più chiaramente in un'altra maniera, basterà ricordarsi, che le superficie de' circoli sono tra loro, come i quadrati de' loro raggi (3. Parte Arti-

Le superficie delle sfere sono tra loro, come i quadrati de' loro raggi.

Articolo VI.), e che le superficie delle sfere sono quadruple de' loro circoli massimi (Articolo LXIX.).

LXXXII.

La proporzionalità tra le superficie de'corpi simili, ed i quadrati de' loro lati omologhi è sì generale, che si può applicare tanto a' corpi, de' quali uno non sà la misura, che a quelli, di cui la misura è nota.

Per esempio, senza saper misurare la superficie di un cilindro obliquo, si può affermare, che le superficie di due cilindri obliqui simili sono tra loro, come i quadrati de'diametri delle basi di questi cilindri. Perchè iscrivendo dentro questi due cilindri due prismi simili, di quante facce uno vorrà, si vedrà dal detto, che le superficie di questi prismi saranno tra loro, come i quadrati de'diametri delle

le basi. Dunque considerando i cilindri medesimi, come li ultimi de' prismi iscritti, avranno le loro superficie il medesimo rapporto.

LXXXIII.

I solidi simili sono trà loro, come i cubi de' loro lati omologhi.

La proposizione fondamentale per la comparazione della solidità de' corpi simili è questa quì.

I solidi simili sono tra loro, come i cubi de' loro lati omologhi.

Questa proposizione si può dimostrare, come la precedente, considerando, che le figure simili non differiscono tra loro, che per le scale, sulle quali sono state costruite.

Per far ciò vedere nella più semplice maniera, che sarà possibile, noi ci serviremo, per esempio, di due prismi simili Z, e z, e di due cubi X x, i lati de' quali sono eguali ad AB, *ab*, linee analoghe in questi due pri-

Fig. VII. e VIII.

smi;

ſmi; di più prenderemo due ſcale AB, *ab* diviſe in un gran numero di parti per poter miſurare le dimenſioni di queſti ſolidi. Ora ciò poſto, è chiaro, che ſi troverà preciſamente altrettanti cubi fatti ſulle parti di *ab* nel priſma *z*, e nel cubo *x*, che di cubi fatti ſulle parti di AB nel priſma Z, e nel cubo X.

Si farà il medeſimo diſcorſo per tutti gli altri ſolidi, e quelli, che potranno avere delle dimenſioni incommenſurabili, ſaranno nella medeſima ragione, che i cubi de' loro lati omologhi.

LXXXIV.

Le sfere ſono tra loro, come i cubi de' loro raggi.

Per dare un eſempio, la ſolidità delle sfere ſono evidentemente tra loro, come li cubi de' loro raggi.

IL FINE.

Tavola I

K
K
L
D
C
2
I
H
3
A
B
E
F
G
P
D
Q
N
M
5
E
6
A
a
b
B
N
M
P
D
Q
M
B
A
a
C
b
B
R
F
E
G
I
7
A
C
B
N
M
P
D
Q
D
C
a
b
c
d
e
f
g
9
A
B
D
B
C
10
B
D
C
D
C
12
A
B

Tavola II.

E
B
A
E
2
C
D
F
B
E
F
G
3
C
B
H
G
4
B
H
D
A
5
C
B
F
A
F
B
D
A
7
C
B
G
A
F
9
E
B
D
F
C
H
G
D
11
A
B
A
B
2
G
C
G
H
F
C
10
A
E
B
K
D

Tavola III

Tavola IV
D
C
F
B
d
e
c
2
a
f
b
p
x
C
c
g
4
b
B
C
h
i
5
c
g
A
b
f
B
O
B
C
A
F
B
P
X
7
b
d
E
D

Tavola V

C
2
H
F
G
B
C
C
C
3
A
B
E
C
A
D
5
B
C
E
E
D
6
F
C
I
M
E
A
B
K
L
O
N
M
L
P

Tàvola VII

X
A
3
E
B
H
C
D
H
K
Y
2
Z
C
4
L
G
A
F
5
E
M
F
C
6
M
H
I
L
P
g
a
h
f
B
A
9
C
q
m
l
r
kp
n
T
e
E
11
G
A
B
C
L
B
F
12
A
M
B

Tavola IX

Tavola X.

B C

B D A 2. E C

E D A C 3. E

B A 5. D C

N M D C 6. F E A B

G 4. H C F

A B F D C 9. E

L M K H I 8. Q O

C B G X Y

F A 10. G O K

Tavola XII
f
g
F
F
D
H
2
G
A
B
A
3
G
B
H
E
C
D
a
m
l
i
k
D
e
d
5
h
b
c
A
X
L
M
8
E
D
Y
A
a
a
g
7
i
m
q
y
q
u
k
Q
f
x
t
H
b
h
e
h
r
c
d
X
s
E
D
12
F
G
O
11
O
13
H
C
T
V
X
I
K
L
S
A
B
M
N
V

Tavola XIII
A
C
B
G
2
D
H
F
E
A
4
B
E
D
C
A
M
P
N
Q
L
7
R
A
6
B
E
D
C
I
L
F
H
G
M
8
A
X
C
B
B